В.А. Абчук

Экономико-математические методы

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА И ЛОГИКА

дроби, доли, простые и сложные проценты, уравнения, прогрессии, комбинаторика, функции, графика, геометрия, логика

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

оптимизация: линейное, нелинейное, динамическое программирование; теория вероятностей; теория массового обслуживания; метод Монте-Карло; теория игр; сетевое планирование

«СОЮЗ»

В. А. АБЧУК
заслуженный деятель науки России, профессор

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Элементарная математика и логика

Дроби, доли, простые и сложные проценты, уравнения, прогрессии, комбинаторика, функции, графики, геометрия, логика, задачи на смекалку

Методы исследования операций

Оптимизация: линейное, нелинейное, динамическое программирование; теория вероятностей и математическая статистика; теория массового обслуживания; метод Монте-Карло; теория игр и статистических решений; сетевое планирование

"СОЮЗ"
Санкт-Петербург
1999

ББК 66.9(3)
А 21

Абчук В.А.

Экономико-математические методы: Элементарная математика и логика. Методы исследования операций. – СПб.: Союз, 1999. – 320 с.

ISBN 5-87852-103-2

Книга адресована учащимся средних и высших учебных заведений экономического профиля, действующим и потенциальным предпринимателям и менеджерам, всем тем, кого интересует решение проблем эффективного предпринимательства и коммерции.

Автор книги – заслуженный деятель науки России, академик Международной Академии Информатизации, профессор В.А. Абчук преподает менеджмент и предпринимательство в высшей школе, является признанным специалистом в области экономико-математических методов, одним из первопроходцев этого научно-практического направления. Им в разное время написано более пяти десятков научных и научно-популярных книг, получивших широкое распространение в России и за рубежом.

ISBN 5-87852-103-2

Оглавление

От автора

Как выработать наилучшее решение в сложной экономической ситуации, рассчитать возможную прибыль и убытки, найти, какие условия кредита сегодня самые выгодные, определить, сколько будут стоить через год-два деньги?

Ответы на эти вопросы можно найти на стыке экономики и математики с помощью особых приемов с характерным названием “экономико-математические методы”. Этим методам, весьма необходимым для успешной деятельности в самых различных сферах целенаправленной человеческой деятельности, посвящена настоящая книга.

Читатель найдет здесь доступное описание основных экономико-математических методов, построенных как на традиционном аппарате математики и логики, известном из школьных программ (дроби, проценты, уравнения, прогрессии, геометрические и логические задачи), так и на основе методов исследования операций – современном математическом аппарате, специально созданном для решения тех задач, с которыми элементарная математика не справляется. Это методы оптимизации (линейное, нелинейное и динамическое программирование), теория вероятностей и математическая статистика, теория массового обслуживания (теория очередей), метод статистических испытаний (Монте-Карло), теория игр и статистических решений, сетевое планирование.

Все перечисленные методы сопровождаются многочисленными расчетными примерами с обстоятельными пояснениями.

Для освоения всего этого арсенала в книге содержится обширный практикум – около трехсот задач с подробными решениями.

От других книг, посвященных применению математических методов в экономике, настоящая отличается:

– практической направленностью с учетом специфики реальной российской экономической ситуации;

– популярным изложением материала, доступного самому широкому кругу читателей, в том числе и не имеющих специальной математической подготовки;

– охватом всех основных приложений математики к экономике.

Книга будет полезна всем, кого интересует решение проблем эффективного предпринимательства и коммерции, в первую очередь – учащимся средних и высших учебных заведений экономического профиля, а также предпринимателям и менеджерам и тем, кто собирается ими стать.

"Деньги счет любят".
Народная мудрость

Введение

Вот уже три пятилетки – срок немалый – страна строит новую, рыночную экономику. За это время в открывшемся океане экономической свободы захлебнулись и пошли на дно целые поколения отважных первооткрывателей-предпринимателей. Но кое-кто – и таких миллионы – выжил, создал собственное дело, процветает.

И всем интересно понять, в чем тут дело: почему одни – в пучине, а другие – на поверхности?

Тысячи умных книг объясняют причину успеха счастливчиков их высокими бойцовыми качествами: смелостью, способностью идти на пролом, упорством в достижении цели, невзирая ни на какие преграды (включая законы). Все это так. Не случайно среди "новых русских" немало крутых ребят, "накачанных" спортсменов, авантюристов, людей с уголовным прошлым (а порой и настоящим).

Но вот как тогда объяснить еще более внушительный и масштабный результат в бизнесе, полученный тщедушными интеллектуалами: математиками, физиками, инженерами, которых трудно заподозрить в "уголовке"?

Осмелюсь предложить свой вариант ответа: успех предпринимательской деятельности в немалой степени зависит от способности "шевелить мозгами", понимать цифры, вести расчеты.

Считать сегодня умеют, конечно, все. Но этот счет, увы, очень часто ограничивается умением складывать и умножать.

Когда же дело доходит до расчетов, связанных с дробями или процентами, школьная эрудиция многих дает осечку.

Между тем коммерческие расчеты сегодня не ограничиваются школьной математикой. Вычисления, связанные с кредитными отношениями, работой с биржами и банками, прогнозированием и риском, не укладываются в элементарную арифметику.

И дело здесь не только в умении правильно выстроить колонки цифр. Современный бизнес требует современного экономического мышления, в немалой степени основанного на специальных математических методах. Доход, прибыль, налог, ссуда, дивиденд, рентабельность – все это цифры, и тут без хорошей математики просто не обойтись: чем правильнее расчет, тем прибыльнее результат.

В современной экономике математика (часто далеко не элементарная) выступает в качестве необходимого инструмента, с помощью которого предприниматель может выбрать наилучший вариант действий из многих возможных.

Соединение экономики бизнеса с математическими расчетами получило название экономико-математических методов.

Возможности, которые применение математики открывает для рационального решения реальных экономических задач, лучше всего рассмотреть на простых примерах.

Пример 1*. Вам предлагают купить товар весом в 100 тонн. Взвешивание производилось некоторое время тому назад и при этом было определено процентное содержание в товаре жидкости, которое составляло 99 %. На момент покупки, за счет усушки, доля жидкости уменьшилась до 96 %. Необходимо рассчитать, сколько весит предлагаемый товар.*

Подавляющее большинство моих слушателей (в том числе экономисты, бухгалтеры, торговцы) обычно называли вес около 97 тонн. Расчет, однако, показывает, что товар при покупке должен весить ровно 25 тонн.

Пример 2. *Вы стали обладателем 27 одинаковых по размеру и внешнему виду бриллиантов. В сертификате на драгоценные камни указано, что один из них весит на незначительную величину меньше, чем остальные. Вес камней неизвестен. Желая отбраковать неполноценный камень, вы попросили ювелира произвести взвешивание бриллиантов. Каждое определение веса на высокоточных чашечных весах стоит 100 руб. Какую сумму придется уплатить ювелиру?*

Интуитивное решение задачи подсказывает, что число взвешиваний будет значительным, никак не меньше 20, а значит, обойдется более чем в 2000 руб. Между тем математический расчет дает сумму уплаты, равную 300 руб.

Пример 3. *Вы собираетесь заключить сделку с некоей фирмой, причем знаете, что эта сделка может по отношению к вам оказаться как честной, так и нечестной. Переговоры с вами ведет представитель фирмы, которому известны ее намерения. Представитель может быть как правдивым человеком, так и лжецом. Как вы думаете, можно ли, задав этому представителю единственный вопрос и получив в ответ "да" или "нет", безошибочно оценить, будет ли сделка честной?*

На первый взгляд задача кажется совершенно нереальной: слишком уж велика степень неопределенности. На самом деле задача имеет вполне определенное решение.

Все три приведенных примера (так же, как еще более 370 других) получают исчерпывающее решение на страницах этой книги.

Главная особенность всех рассмотренных примеров в том, что глазомерные, интуитивные решения оказываются несостоятельными. Сбои, которые дает наша интуиция при решении расчетных задач, явление весьма характерное и вполне объяснимое. Наш мозг приспособлен успешно и быстро решать лишь те задачи, которым обучен. В этом он напоминает компьютер: нет программы, нет и решения. Разница лишь в том, что при отсутствии программы компьютер просто не будет работать, а вот человек – станет и... допустит грубую ошибку. Это очень опасно. Ведь за каждым таким решением стоят упущенные возможности, без толку растраченные ресурсы, потерянное время.

Экономико-математические методы как раз и призваны оградить предпринимателей и менеджеров от подобных ошибок, дать им надежное средство для правильного решения экономических задач.

Решение большинства задач экономической практики базируется на элементарной математике: арифметике, алгебре, геометрии. Это задачи с дробями, процентами, пропорциями, прогрессиями, уравнениями. Находят применение также функции и графики, комбинаторика, логика. Всем этим задачам в книге уделено должное место.

Наряду с элементарной математикой и логикой рассматриваются также задачи, требующие применения аппарата высшей математики, особенно в теории вероятностей и математической статистике, а также в таких сравнительно молодых методах, как математическое программирование (линейное, нелинейное, динамическое), теория игр и статистических решений, теория массового обслуживания (теория очередей), метод статистических испытаний (Монте-Карло), сетевое планирование.

Автор приложил немало усилий, чтобы сделать эти, для большинства практиков новые и экзотические методы доступными и интересными, не выходя за рамки обычной школьной математики. При таком упрощении неизбежно пострадала строгость изложения и доказательств, за что автор заранее приносит извинения ревнителям чистой математики, к которым он питает искреннее уважение.

Итак, книга написана для практиков. Что же в ней найдут действующие и потенциальные предприниматели, менеджеры, специалисты по маркетингу и коммерции?

Книга состоит из двух частей.

Первая часть – описание экономико-математических методов. Вначале определяется их суть (глава 1), затем, во 2-й главе, описываются методы, основанные на традиционной школьной математике. Экономико-математические методы, выходящие за пределы элементарной математики и получившие название "методы исследования операций", составляют содержание главы 3.

Описание каждого метода сопровождается развернутыми примерами (всего их более семидесяти) с подробными решениями.

Вторая часть книги содержит практикум: задачи и решения задач.

Задачи и решения содержат рубрики, соответствующие экономико-математическим методам, приведенным в первой части книги. Всего приводится 245 задач, носящих в основном оригинальный характер.

Для практического выбора наилучшего решения конкретной реальной задачи читатели могут воспользоваться приведенными в § 3 1-й главы рекомендациями. Этому будет способствовать и *предметный указатель*, помещенный в конце книги.

Часть I

МЕТОДЫ
(ОПИСАНИЕ И ПРИМЕРЫ)

ГЛАВА 1. ЧТО ТАКОЕ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

§ 1. Модели и моделирование

Рассмотрим типичную производственно-экономическую ситуацию.

На предприятии каждый из операторов обслуживает 6 однотипных объектов. Это могут быть потребители, клиенты, технические устройства. При возникновении у одного из объектов потребности в обслуживании оператор получает соответствующий сигнал, производит обслуживание и ждет следующего вызова. Следовательно, какую-то часть своего рабочего времени оператор находится "на простое", что, понятно, ведет к экономическим потерям предприятия.

Стремясь сократить простои, менеджер увеличивает нагрузку на операторов: добавляет каждому еще по одному объекту обслуживания.

Из этого, однако, ничего хорошего не получается: операторы перестают справляться со своими обязанностями. Пока идет обслуживание одного из объектов, поступает вызов от другого, а поскольку в этот момент оператор занят, образуется очередь на обслуживание.

Менеджеру приходит на ум интересная идея: а нельзя ли создать бригаду из четырех операторов и закрепить за всеми вместе 26 объектов? Может быть, в этом случае простои сократятся – из четырех операторов всегда кто-нибудь да окажется свободен и готов к обслуживанию очередного вызова. При таком распределении появится явный выигрыш: среднее число объектов, приходящихся на одного оператора, увеличится по сравнению с существующим и станет равным 26 : 4 = 6,5. Налицо прямая выгода.

Но почему 26 на четырех, а не, допустим, 21 на троих – при этом выигрыш будет еще больше (21 : 3 = 7). Кстати, а где гарантия, что при предлагаемых увеличениях нагрузки будут устранены очереди?

Решить такую задачу опытным путем, перебирая различные варианты прикрепления операторов к объектам, практически невозможно. Ни в каком опыте нельзя воссоздать все те условия, которые бывают в жизни: вызов от каждого объекта может прийти в любое время (в первую минуту, во вторую минуту и т. д.), да и время обслуживания может быть самым различным. Попробуй-ка перебрать все возможные сочетания для всех объектов.

Как же быть?

В подобном положении оказываются представители многих профессий. Скажем, конструктор проектирует новый самолет. Можно сделать его в сотне, тысяче различных вариантов. Но какой из них лучше? Не строить же по каждому варианту самолет!

И конструктор находит выход. Он делает вначале не настоящий самолет, а его модель. Несложная по устройству и поэтому недорогая модель не только заменяет на испытаниях реальный объект, но и делает его доступнее для изучения.

К моделированию прибегают всегда, когда необходимо разобраться в каком-нибудь сложном явлении, уловить его скрытые закономерности. Например, модель плотины гидроэлектростанции нужна инженерам для того, чтобы решить, каким должно быть это сложнейшее сооружение в действительности. При этом совершенно не важно, из какого материала смоделированы берега реки и железобетонное тело плотины. Они могут быть из обычного дерева или пластмассы. И тем не менее такая игрушка ведет себя во многом совсем как настоящая река, перегороженная настоящей плотиной.

Простота модели по сравнению с реальным объектом достигается тем, что в ней сохраняется лишь самое главное, наиболее важное, а все второстепенное, не существенное для интересующей нас задачи, отбрасывается.

Модель чем-то напоминает беглый карандашный набросок. Один-два штриха на бумаге – и вот уже не только знакомые черты, но и характер, неповторимый образ человека. Кстати, портрет и скульптура, и литературный образ, и даже фотография любимого человека – это тоже модели. Модели, выполненные художественными средствами.

Создание моделей ситуаций, требующих принятия решений, моделей операций, как их называют, безусловно, совершается и в мозгу человека.

А нельзя ли попробовать создать модель интересующего нас процесса обслуживания объектов операторами? Вот только из какого материала ее лучше сделать? Оказывается, самым удобным, податливым (и дешевым) “материалом” для подобных моделей является не дерево, не пластмасса, а... математика. Представьте себе математическую формулу, показывающую, от чего зависит эффективность работы наших операторов. Подставляя в эту формулу цифры, показывающие возможное число объектов и количество обслуживающих их операторов, а также среднее время обслуживания, мы можем получить решение, обеспечивающее эффективную работу предприятия.

Математика – язык, на котором сегодня говорит любая точная наука. Современная физика, химия, астрономия не мыслимы без математики. В наши дни математика прочно вошла и в такие науки, как биология, психология, в науку о языке. Не отстает и экономика. Сбываются слова великого французского ученого, родоначальника рационализма Рене Декарта (1596–1650): “Все исследования, направленные на изучение порядка и меры, принадлежат математике”.

Когда с помощью модели “из математики” (она получена на основе теории массового обслуживания – одного из экономико-математических методов, с которым мы вскоре познакомимся) произвели расчеты нашей задачи, оказалось, что наилучший результат получится, если группу из трех операторов закрепить за 20-ю объектами. В этом случае без всяких дополнительных затрат заметно увеличивается производительность труда, сокращаются простои операторов, их загрузка увеличивается примерно на 8 %.

И еще одно важное обстоятельство. Удобство математического моделирования не только в его простоте и универсальности. Математическая форма модели позволяет привлечь для анализа сложнейших экономических ситуаций и выработки трудных решений мощного помощника – компьютер.

Вот несколько примеров экономико-математического моделирования.

Пример 1.1

Рассмотрим формулу эффективности (Э):

$$Э = Р/З,$$

где Р – результат деятельности, З – затраты на получение данного результата.

Эта модель просто и наглядно показывает, что эффективность прямо пропорциональна результату и обратно пропорциональна затратам.

Пример 1.2

Применим экономическое моделирование для изучения производственных возможностей.

Производственные возможности показывают способность предприятия производить различные наборы (сочетания) товаров при постоянстве ресурсов и при условии их полного использования.

Рассмотрим несколько ситуаций.

На маленький необитаемый остров в результате кораблекрушения выброшена группа людей (небольшой остров здесь нужен для оправдания ограниченности ресурсов). На острове водятся кролики, в реке есть рыба. Наши "робинзоны" в состоянии в день поймать в среднем:

либо одного кролика и 6 кг рыбы,

либо трех кроликов и 4 кг рыбы,

либо пять кроликов без рыбы.

Построим график производственных возможностей.

Для этого будем откладывать по оси X количество ежедневно отлавливаемых кроликов, а по оси Y – количество килограммов ежедневно вылавливаемой рыбы (рис. 1.1). Для каждого из возможных сочетаний улова отметим точки на графике и по ним построим кривую линию. Это и будет кривая производственных возможностей (она показана двойной линией на рис. 1.1). Кривая производственных возможностей вогнута относительно начала координат, что говорит о характере зависимости между количеством добываемых источников пищи обоих видов: увеличение одного из них ведет к уменьшению другого, и наоборот.

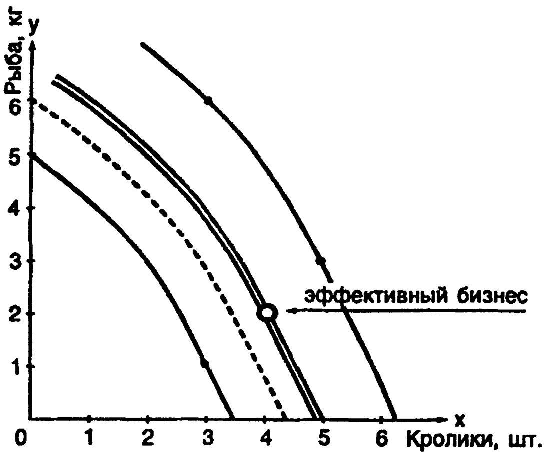

Рис. 1.1. График производственных возможностей

Все точки кривой производственных возможностей соответствуют такому сочетанию товаров (добываемых источников пиши), которое возможно для данных условий или, как принято говорить, соответствует эффективному бизнесу. Это, например, 4 кролика и 2 кг рыбы. Точки, лежащие внутри кривой производственных возможностей, показывают такое сочетание товаров (количества кроликов и рыбы), при котором возможности обитателей острова используются неполностью. А точки, лежащие снаружи кривой, соответствуют такому сочетанию источников пищи, получение которого обитателями острова невозможно.

Построенная кривая соответствует вполне определенным возможностям обитателей острова: их количеству, умению охотиться и рыбачить и т.п. Стоит изменить эти возможности – и кривая переместится на графике вправо при росте возможностей или влево при их снижении. Это показано на рис. 1.1 с помощью одинарных линий. Нетрудно убедиться, что для линии уменьшившихся производственных возможностей количество улова уменьшается, а для линии увеличившихся возможностей – растет.

Итак, линия производственных возможностей позволяет решать следующие задачи:

– определять условия эффективного бизнеса;

– демонстрировать недостаток или избыток возможностей для конкретного сочетания производимых товаров;

– оценивать, за счет какого увеличения или уменьшения производимых товаров можно прийти к эффективному бизнесу.

Математические модели, созданные для целей экономики, изучаются специальной научной дисциплиной, получившей название *"экономико-математические методы"*.

§ 2. Какие бывают экономические методы и что они могут

Экономико-математические методы представляют собой своеобразный инструментальный набор, с помощью которого экономисты, бизнесмены, менеджеры, стремясь добиться наилучшего эффекта, "обрабатывают" свой материал. Этот инструментарий имеет свою историю.

...В 1938 г. к двадцатипятилетнему профессору Ленинградского университета Леониду Витальевичу Канторовичу обратились представители фанерного треста с необычной для того времени просьбой. Требовалось рассчитать наивыгоднейшее распределение работы восьми станков при условии, что известна производительность каждого станка по каждому из пяти видов материалов (мы еще встретимся с похожей задачей на страницах нашей книги).

Наука того времени не располагала методами для подобных решений. И молодому ученому ничего другого не оставалось, кроме как придумать свой оригинальный метод решения "станковой" задачи.

Но, главное, сделанное Л.В. Канторовичем выходит далеко за пределы забот фанерного треста. Отталкиваясь от частной задачи, ученый нашел общий метод решения целого ряда важнейших экономико-производственных проблем. Новый метод, названный линейным программированием, дал ответ на вопрос, как управлять предприятием, чтобы обеспечить максимально возможную прибыль.

За разработку метода линейного программирования и экономических моделей академик Л.В. Канторович совместно с американским профессором К. Купмансом в 1975 г. получил Нобелевскую премию по экономике.

Линейное и, шире, математическое программирование – сейчас один из основных методов обоснования производственно-экономических решений. Но не единственный. Сегодня наряду с ним существует целый арсенал математических средств выработки наилучших решений. С этим замечательным арсеналом и его практическим применением мы познакомимся на страницах книги.

Среди образцов экономико-математического "вооружения" встречается как старое, проверенное веками "оружие" – арифметика, алгебра, геометрия, так и специально разработанные математические методы, появившиеся сравнительно недавно и получившие название *методов исследования операций.*

Исследование операций было призвано решать те задачи, с которыми традиционная математика уже не могла справиться. Заметный толчок развитию методов исследования операций дала Вторая мировая война. Тогда для выработки военных решений были привлечены значительные научные силы: ученые-математики, физики, биологи (только в США над исследованием операций трудилось более 800 ученых, в том числе – с мировыми именами). Их объединенными усилиями, по сути, было создано новое научное направление.

В послевоенные годы методы исследования операций получили широкое распространение во всех отраслях народного хозяйства: в промышленности, на транспорте, в торговле. При этом под операцией стала пониматься любая целенаправленная деятельность человека. Методы исследования операций стали научной основой экономико-математических методов.

Исследование операций иногда называют "количественным выражением здравого смысла". Существует, правда, и более скромное определение: "исследование операций представляет собой искусство давать плохие ответы на те практические вопросы, на которые даются еще худшие ответы другими способами". Как понимать это признание английского ученого Т. Саати? Дело в том, пишет известный российский специалист профессор Е.С. Вентцель, что исследование операций "способно дать плохой ответ на вопрос, на который нельзя ответить по-другому". Иными словами, эта наука в большинстве случаев остается единственным средством для принятия обоснованных решений в сложных ситуациях.

Чем же объяснить, что многие из тех, кому приходится постоянно принимать ответственные экономические решения (в том числе, возможно, и кое-кто из читателей), и не слышали о существовании столь полезной науки?

Думаю, главная причина в трудности освоения этих методов, которые обычно описываются на сложном языке высшей математики, малодоступной для людей, не имеющих соответствующей подготовки. Поэтому в нашей книге сделана попытка обойти такие трудности, переложив экономико-математические методы на общедоступный язык школьной математики, который знаком нам с детства. Трудности такого изложения хорошо описал известный американский специалист по исследованию операций Ричард Беллман: приходится идти "прямой и узкой тропой между Западнями Переупрощения и Болотом Переусложнения". И, тем не менее, другого пути нет. Отправимся же в это нелегкое, но столь необходимое и полезное путешествие.

Каждый из экономико-математических методов, подобно разнообразным инструментам, находящимся в распоряжении специалиста, имеет свою область применения.

Элементарная арифметика и алгебра (уравнения, функции и графики) применяются для экономических расчетов, связанных с определением долей, процентов материальных ресурсов, составлением пропорций, счетом денег, вычислением прибыли, налогов, рентабельности и т.п.

Арифметические и геометрические прогрессии позволяют вести расчеты, связанные с последовательностями экономических показателей и объектов (например, так называемые "пирамиды").

Комбинаторика дает возможность определять результаты, возникающие при различных сочетаниях экономических объектов, их перестановках и размещениях.

Геометрия предназначена для вычислений, связанных с пространственными отношениями и формами объектов, интересующих экономиста.

Логика позволяет оценить экономическую ситуацию с точки зрения истинности или ложности используемой информации, разобраться в запутанных обстоятельствах, найти рациональный выход из затруднительного положения.

Линейное программирование предназначено для выработки оптимального решения экономической задачи для случая, когда ее условия и имеющиеся ограничения описываются уравнениями или неравенствами 1-й степени.

Нелинейное программирование служит для выработки оптимального решения экономической задачи в том случае, когда ее условия и ограничения описываются уравнениями или неравенствами 2-й и более степени.

Динамическое программирование дает возможность выбора оптимального плана многоэтапных действий, в которых результат каждого последующего этапа зависит от предыдущего.

Теория вероятностей обосновывает экономические расчеты, связанные с явлениями случайного характера.

Математическая статистика обеспечивает сбор, обработку и анализ экономических статистических материалов.

Теория массового обслуживания (теория очередей) дает расчеты производственно-экономических показателей и выработку необходимых рекомендаций для массовых повторяющихся процессов обслуживания.

Метод статистических испытаний (Монте-Карло) служит для производства экономических расчетов, связанных с явлениями случайного характера, на основе искусственно произведенных статистических материалов.

Теория игр служит для выработки экономических решений в условиях неопределенности, неясности ситуации, вызванной сознательными, злонамеренными действиями конфликтующей стороны.

Теория статистических решений применяется для выработки экономических решений в условиях неопределенности, вызванной объективными обстоятельствами, которые либо неизвестны, либо носят случайный характер.

Сетевое планирование применяется для составления и реализации рациональных планов ведения экономических операций, предусматривающих решение задачи в кратчайший срок и с наилучшими результатами.

Столь богатый арсенал методов решения экономических задач делает весьма актуальным вопрос: а как из многих возможных вариантов решения определить наилучший, правильный, самый хороший или, как часто говорят, оптимальный? Какой смысл вкладывают в понятия "правильное", "оптимальное" решение экономической задачи?

§ 3. Что означают слова "правильное", "оптимальное" решение

Начнем с примера.

Пример 1.3

Маркетинговое исследование показало, что в требуемый срок партия однотипного товара может быть продана по цене:

– 30 у.д.ед. (условных денежных единиц) за штуку – в количестве 100 штук;

– 40 у.д.ед. за штуку – в количестве 80 штук;

– 50 у.д.ед. за штуку – в количестве 60 штук.

По какой из этих цен следует продавать товар?

Иными словами – какое из трех возможных ценовых решений лучше? Не торопитесь с ответом. Ибо "лучшего" решения, как такового, на все случаи жизни, не бывает. О качестве решения можно судить, лишь зная цель операции. Таких целей здесь может быть несколько:

– продать товар по максимальной цене;

– продать максимальное количество товара;

– продать товар по цене, обеспечивающей максимальную выручку.

Зная цель, можно сказать, какое, отвечающее ей решение, лучше:

если цель – продать товар по максимальной цене – лучшее решение: "продавать по 50 у.д.ед.";

если цель – продать максимальное количество товара – лучшее решение: “продавать по 30 у.д.ед.”;

если цель – продать товар по цене, обеспечивающей максимальную выручку, – лучшее решение: “продавать по 40 у.д.ед.”

Таким образом, качество решения определяется степенью его соответствия цели: чем с меньшими затратами ресурсов и времени может быть достигнута цель при данном решении, тем оно лучше и “правильнее”.

Непонимание цели предстоящей экономической операции лишает решение смысла: ведь чтобы получить правильный ответ, нужно задать правильный вопрос. Весьма образно сказал по этому поводу немецкий философ И. Кант: “Если вопрос сам по себе бессмыслен и требует бесполезных ответов, то кроме стыда для вопрошающего он имеет иногда еще тот недостаток, что побуждает неосмотрительного слушателя к нелепым ответам и создает смешное зрелище: один (по выражению древних) доит козла, а другой держит под ним решето”.

Примером неправильно сформулированного оптимального решения может служить расхожая фраза: “получение максимума доходов и минимума расходов” (ее первоисточник: “максимум надоев при минимуме кормов”). Вдумаемся. Поскольку, как известно, увеличение доходов до максимума отнюдь не ведет к снижению расходов до минимума, совершенно не ясно, какое решение принимать. То ли добиваться, чтобы доходов стало как можно больше, то ли чтобы расходов – как можно меньше. Правильным было бы сформулировать оптимальное решение как “получение максимума доходов при данных расходах” или “получение данных доходов при минимуме расходов”.

Из всего сказанного ясно, что исследование операций и экономико-математические методы не ограничиваются лишь словесным формулированием цели, а речь идет о количественном обосновании решений. Мало сказать: “хорошее” или “оптимальное” решение, нужно уметь оценить его с помощью конкретной цифры. Как же связать цель, к которой мы стремимся, с определенным числом?

Лев Толстой как-то, видимо в шутку, предложил измерять качество человека с помощью дроби, в числителе которой стоит оценка его действительных достоинств, а в знаменателе – показатель его мнения о себе. От действительных достоинств качество человека повышается, от самомнения – падает.

В соответствии с идеей великого писателя и с соответствующей степенью серьезности проведем следующий эксперимент. Спросим кого-нибудь из знакомых, как он (она) оценивает себя по пятибалльной системе оценок. Скажем, называется оценка 4. Эта цифра и ставится в знаменатель дроби. Далее просим дать оценку этого человека (желательно анонимно) кого-нибудь из окружающих его людей. Предположим, называется 3. Помещаем тройку в числитель дроби, и "показатель качества человека" готов. Он равен $^3/_4$, или 0,75. Заметим, что если бы тот, кого оценивают, был несколько скромнее (допустим, ценил себя на 3 балла) либо заслужил более высокую оценку окружающих (например, 4 балла), то его "показатель по Л.Н. Толстому" поднялся бы в обоих случаях до 1.

В рассуждениях Толстого заложен глубокий смысл. Количественные показатели, выражающие цель операции, находят в экономико-математических методах самое широкое применение. Так, работа любого предприятия характеризуется объемом выпускаемой продукции, прибыльностью, затратами и т.д., и если первые два показателя нужно стремиться иметь побольше, то вряд ли это можно сказать о третьем. Используя методы исследования операций, можно установить не только, какой показатель следует наращивать, но и то его требуемое значение, которое необходимо для экономического успеха.

Выбор показателя успешности операции, так же как и подбор соответствующего экономической задаче математического метода, не только наука, но и своеобразное искусство. Искусство же, как правило, требует постоянных упражнений. Книга предоставляет для этого широкие возможности.

Каким же видится порядок решения практических задач с помощью экономико-математических методов?

§ 4. Как применять экономико-математические методы на практике

Для решения конкретных практических экономических задач можно рекомендовать такую последовательность:

1. Уясняем задачу – ее экономический смысл. На этой основе устанавливаем цель решения.

2. Оцениваем экономическую ситуацию – определяем, от чего зависит достижение установленной цели.

3. Выбираем численный показатель, от которого достижение цели зависит в первую очередь.

4. Строим математическую модель операции, устанавливающую количественные зависимости избранного показателя от условий задачи. Для этого, обращаясь к табл. 1.1, подбираем соответствующий экономико-математический метод.

5. С помощью математической модели и найденного экономико-математического метода решаем задачу.

6. Проверяем правильность найденного решения.

Лучше всего рассмотреть практическое применение экономико-математических методов на конкретных примерах. В качестве первого такого примера возьмем пример 1 из введения.

Итак, по порядку:

1. Экономический смысл задачи в том, что, рассчитывая уменьшение веса товара за счет усушки, мы не располагаем прямыми данными об уменьшающемся весе товара. Цель решения – определить, на сколько снизился вес за счет усушки, по косвенным данным о сокращении процентного содержания в товаре жидкости.

2. Снижение веса зависит от изменения количества испаряющейся в процессе усушки жидкости, что отражается в сокращении ее процентного содержания в товаре.

3. Основным показателем снижения веса товара является его абсолютное изменение, а не изменение процентного содержания жидкости. Ибо изменение содержания жидкости на определенный процент вовсе не означает, что и вес товара изменится на тот же процент.

4. Математическая модель должна установить зависимость абсолютного изменения веса товара при усушке от изменения процентного содержания воды.

Поскольку в нашей задаче речь идет об определении процентов и пропорций, в качестве экономико-математического метода целесообразно избрать арифметику и алгебру (см. табл. 1.1).

Таблица 1.1

Выбор математического метода для решения экономической задачи

№ п/п	Экономический смысл задачи	Математический метод
1	Экономические расчеты, связанные с определением долей, процентов, пропорций материальных ресурсов, счетом денег, вычислением прибыли, налогов, рентабельности и т.п.	Арифметика (доли, проценты, пропорции), алгебра (уравнения, функции, графики)
2	Расчеты задач, содержащих последовательности взаимосвязанных экономических показателей и объектов (например, так называемые "пирамиды")	Арифметические и геометрические прогрессии
3	Вычисления, связанные с сочетанием различных экономических объектов, их перестановкой и размещением	Комбинаторика
4	Расчеты в области пространственных отношений и форм экономических объектов	Геометрия
5	Оценка экономических ситуаций, связанных с определением истинности или ложности информации, необходимостью найти выход из затруднительного положения	Логика
6	Выбор оптимального варианта решения экономической задачи для случая, когда условия описываются уравнениями 1-й степени	Линейное программирование
7	Выбор оптимального варианта решения экономической задачи для случая, когда условия описываются уравнениями 2-й и более степени	Нелинейное программирование
8	Выбор оптимального плана многоэтапной экономической операции, когда результаты каждого последующего этапа зависят от предыдущего	Динамическое программирование
9	Экономические расчеты, связанные с явлениями и величинами случайного характера	Теория вероятностей
10	Сбор, обработка и анализ статистических экономических материалов	Математическая статистика
11	Расчеты производственно-экономических показателей и выработка необходимых рекомендаций в массовых повторяющихся случайных явлениях	Теория массового обслуживания (теория очередей)
12	Экономические расчеты, связанные с явлениями и величинами случайного характера, на основе искусственно произведенных статистических материалов	Метод статистических испытаний (Монте-Карло)
13	Выработка экономических решений в условиях неопределенности ситуации, вызванной сознательными злонамеренными действиями конфликтующей стороны	Теория игр
14	Выработка экономических решений в условиях неопределенности ситуации, вызванной объективными обстоятельствами	Теория статистических решений
15	Составление и реализация рациональных планов проведения экономических операций, предусматривающих решение задачи в кратчайший срок и с наилучшими результатами	Сетевое планирование

В соответствии с алгебраическими правилами обозначим через x искомый вес товара при втором замере содержания жидкости и составим очевидное уравнение, которое и будет математической моделью нашей задачи:

$$\frac{x-1}{x} = 96\,\% = \frac{96}{100}. \qquad (*)$$

Здесь 1 тонна – это вес сухого остатка – неиспаряемой части товара, одинаковой для первого и второго замера. Этот вес определяется по результатам первого замера содержания жидкости:

100 т – 99 % от 100 т = 1 т.

5. Решая уравнение (*), получим:

$$x = {}^{100}/_{4} = 25 \text{ т.}$$

6. Производим проверку правильности решения:

Замер	Сухой остаток		Жидкость		Всего	
	%	вес, т	%	вес, т	%	вес, т
1-й	1	1	99	99	100	100
2-й	4	1	96	24	100	25

Что и требовалось доказать.

В рассмотренном примере, как и во многих других практических экономических задачах, нет необходимости производить оптимизацию. Требуется лишь произвести правильный расчет необходимого показателя – получить единственно возможное решение.

Следующий пример потребует выполнить оптимизацию. Это пример 2 из введения. Приступим к процедуре расчета:

1. Экономический смысл задачи – найти фальшивый бриллиант с минимальными расходами на взвешивание. Отсюда цель решения: определение минимального числа взвешиваний, достаточного для выявления подделки.

2. Число взвешиваний связано как с количеством исследуемых бриллиантов, так и с порядком разделения их на части для поочередного взвешивания.

3. Поскольку мы имеем дело с чашечными весами, взвешивание должно производиться путем раскладки различных количеств камней по чашкам весов. Если при равных количествах камней на

обеих чашках весы уравновешиваются, значит, подделка находится среди тех камней, которые исключены из взвешивания. Если же груз на одной из чашек оказался легче, чем на другой, значит, там и находится фальшивый камень.

Самый простой способ поиска – уложить на одну чашку какой-нибудь из камней, а на другую поочередно класть остальные 26 бриллиантов. Это потребует максимально возможного числа взвешиваний – 26-ти.

Нас, однако, интересует не максимум, а минимум. Поэтому такой перебор (его в исследовании операций называют сплошным или "слепым") нас явно не устраивает. Следует искать способ более рационального выбора, ведущего к уменьшению количества взвешиваний.

Таким образом, достижение поставленной цели зависит от выбора такого разделения камней при взвешивании, при котором количество взвешиваний окажется минимальным.

Основным показателем, от которого зависит достижение поставленной цели, является минимум количества взвешиваний, приводящий к решению задачи – определению подделки с минимальными расходами.

4. Математическая модель задачи должна связать минимальное количество взвешиваний с общим количеством камней и количеством камней в каждой группе при их разделении.

Подобная модель может быть построена с помощью одного из методов оптимизации – линейного программирования (см. § 1 гл. 3), устанавливающего правила направленного, т.е. рационального, перебора вариантов.

В данной задаче суть направленного перебора в том, что если разделить камни на три одинаковые части и две из них разложить по чашкам весов, то всего за одно взвешивание можно определить, в какой из трех частей находится фальшивый бриллиант. Затем та часть, где обнаружена подделка, снова делится на три, снова производится взвешивание, и так до тех пор, пока в последней тройке не окажется три камня. Теперь уже взвешивание однозначно укажет на то, какой камень поддельный. Такой направленный перебор резко сократит необходимое количество взвешиваний. В данном примере их потребуется всего лишь три.

Перейдем на язык математики: минимальное потребное количество взвешиваний ($B_{мин}$) можно получить, исходя из очевидного соотношения:

$$N = \overbrace{3 \cdot 3 \cdot 3}^{B_{мин}\ раз} = 3^{B_{мин}},$$

откуда
$$\sqrt[B_{мин}]{N} = 3, \qquad (**)$$

где N – количество исследуемых объектов.

Это и есть математическая модель задачи.

5. Произведем численный расчет:

подставляя в формулу (**) N = 27, получим

$$\sqrt[B_{мин}]{27} = 3,$$

откуда видно, что минимальное потребное количество взвешиваний равно 3.

6. Расчет легко проверить, проведя мысленный опыт:

1-е взвешивание. На чашках весов по 9 камней. Определяем, в какой девятке подделка.

2-е взвешивание. На чашках весов по три камня. Определяем, в какой тройке подделка.

3-е взвешивание. На чашках весов по одному камню. Находим фальшивый бриллиант.

Что и требовалось доказать.

ГЛАВА 2. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА И ЛОГИКА В ЭКОНОМИКЕ

К элементарной математике мы приобщаемся с раннего детства, систематически изучаем в школе, прибегаем к ее услугам на каждом шагу.

В этой главе будет дан обзор и приведены примеры решения экономических задач с применением таких проверенных инструментов математики, как дроби, пропорции, основные действия арифметики и алгебры, простые и сложные проценты, уравнения, прогрессии и комбинаторика, функции и графики, геометрия и логика, и, наконец, таких, где просто требуется смекалка.

§ 1. Дроби, доли, пропорции и основные действия арифметики и алгебры

Во многих экономических задачах приходится приводить *дроби* к общему знаменателю, а также производить их сокращение. При этом необходимо помнить, что величина дроби не изменится, если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же число:

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot N}{b\cdot N};\ \frac{a}{b}=\frac{\frac{a}{M}}{\frac{b}{M}}.$$

Для того чтобы сложить или вычесть дроби, необходимо привести их к общему знаменателю, а затем сложить или вычесть числители:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{cb}{bd} = \frac{ad \pm cb}{db}.$$

Умножение дробей сводится к умножению числителя на числитель и знаменателя на знаменатель:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Деление дробей сводится к умножению числителя первой дроби на знаменатель второй, а знаменателя первой на числитель второй дроби. Первое произведение становится числителем произведения дробей, а второе – его знаменателем:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

П р и м е р 2.1

Умирая, муж оставил завещание жене, которая ждала ребенка:

если она родит сына, то ему будет причитаться $^2/_3$ оставленного имущества, а матери – $^1/_3$;

если родится дочь, то имущество распределяется между ней и матерью в соотношении $^1/_3$ и $^2/_3$.

Родились близнецы – мальчик и девочка.

Как в этом непредвиденном случае распределить по справедливости имущество?

Решение

Решение неоднозначно и зависит от толкования воли завещателя.

1) Если считать волей завещателя дать сыну наследство вдвое больше, чем матери ($^2/_3$ и $^1/_3$), а дочери – вдвое меньше, чем матери ($^1/_3$ и $^2/_3$), то наследство следует разделить в пропорции: дочери – 1 часть, матери – 2 части, сыну – 4 части, т. е. $^1/_7$; $^2/_7$; $^4/_7$.

2) Если же считать волей завещателя также и желание не оставить матери менее $^1/_3$ наследства (первое толкование этот принцип нарушает: $^2/_7$ меньше $^1/_3$), то делить следует по-иному.

За матерью должна быть закреплена $^1/_3$ наследства, а оставшиеся $^2/_3$ делятся между сыном и дочерью в упомянутом соотношении 1 : 4 (или $^1/_5$ от $^2/_3$ и $^4/_5$ от $^2/_3$).

Тогда дочь получает $^2/_{15}$, сын $^8/_{15}$, а мать $^5/_{15}$ наследства.

Пропорция – это такая зависимость между четырьмя числами, при которой отношения в составленных из них двух парах равны между собой:

$$a : b = c : d.$$

При этом произведение крайних членов пропорции равно произведению ее средних членов:

$$a \cdot d = b \cdot c.$$

Пример 2.2

Вам предлагают купить 100 т товара по 300 тыс. у.д.ед. за тонну. Товар в своем составе содержит жидкость, способную с течением времени испаряться (это могут быть, например, творог, мясо или огурцы). Выясняется, что взвешивание проводилось месяц назад. Тогда же было определено процентное содержание жидкости, которое равнялось 99 % (по весу). По вашему требованию на день купли производится повторный замер содержания жидкости, который показывает, что теперь ее уже осталось в товаре 90 % (по весу).

Сколько денег вы должны заплатить за товар?

Решение

Вначале рассчитаем, какой процент и вес сухого остатка в товаре.

При первом замере жидкости сухой остаток составил 1 % и весил 1 т.

При втором замере – соответственно 10 % и снова 1 т (вес сухого остатка не меняется).

Интересующий нас вес всего товара (100 %) при втором замере (x) находим из очевидной пропорции:

$$10\ \% - 1\ \text{т},$$
$$100\ \% - x\ \text{т},$$

откуда $x = 10$ т.

За этот товар следует заплатить

$$10\ \text{т} \cdot 300\ \text{тыс. у.д.ед.} = 3\ \text{млн у.д.ед.}$$

В большинстве экономических задач приходится производить *основные действия арифметики и алгебры*: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня.

Пример 2.3

Три предприятия строят сооружение на равных долевых началах. Для строительства потребовалось 110 каменных блоков. Первое предприятие в счет своей доли внесло 70 блоков, второе – 40, а третье решило свою долю блоков оплатить деньгами, выделив для этого 110 тыс. у.д.ед.

Как разделить эти деньги между 1-м и 2-м предприятиями?

Решение

Доля каждого предприятия составляет:

$$\frac{110\,\text{блоков}}{3}, \text{ которые стоят } 110 \text{ тыс. у.д.ед.}$$

Отсюда стоимость 1 блока равна:

$$110\,\text{тыс. у.д.ед.} : \frac{110\,\text{блоков}}{3} = 3\,\text{тыс. у.д.ед.}$$

Из этого следует, что 1-е предприятие затратило 70 блоков по 3 тыс. у.д.ед., т.е. 210 тыс. у.д.ед.; 2-е предприятие – 40 блоков по 120 тыс. у.д.ед.; 3-е предприятие, как известно, – 110 тыс. у.д.ед.

Очевидно, что 3-е предприятие должно 1-му 100 тыс. у.д.ед. (210 – 110) и 2-му – 10 тыс. у.д.ед. (120 – 110).

Пример 2.4

При разделе в связи с ликвидацией предприятия его имущества стоимостью 860 тыс. у.д.ед. между тремя компаньонами было решено долю каждого определять пропорционально сроку его вступления во владение предприятием, которое было основано одним из компаньонов шесть лет тому назад. При этом оказалось, что на каждые 3 доли, причитающиеся компаньону А, компаньону Б причитается 2, а на каждые 5 долей, причитающихся компаньону А, компаньону В причитается 6 долей.

1) Какую сумму получил каждый компаньон?

2) Сколько лет каждый компаньон владел предприятием?

Решение

Если принять долю компаньона А за единицу, то доля Б составит $^2/_3$, а доля В – $^6/_5$. Переходя к целым числам (для этого нужно умножить дробные доли на их общий знаменатель, равный 12), получим долю А, равную 15, долю Б – 10 и долю В – 18.

1) Исходя из долей, определим суммы, причитающиеся каждому компаньону.

Компаньону А причитается:

$$\frac{860}{15+10+18}\cdot 15 = 20\cdot 15 = 300 \text{ тыс. у.д.ед.,}$$

компаньону Б – 20 · 10 = 200 тыс. у.д.ед.,

компаньону В – 20 · 18 = 360 тыс. у.д.ед.

2) Из условия задачи и полученных долей ясно, что старший компаньон (В) владеет предприятием 6 лет (что в три раза меньше 18). Значит, в соответствии с долями компаньон А владеет предприятием $^{15}/_3$ = 5 лет, а компаньон Б: $^{10}/_3$ = 3 года и 4 месяца.

П р и м е р 2.5

Товар ценой 120 у.д.ед. уценивается в три приема, причем при каждой уценке цена уменьшается в одно и то же количество раз. В результате последней уценки товар продается по себестоимости – за 35,6 у.д.ед.

Какая цена должна быть установлена в результате первой и второй уценок?

Решение

Обозначим величину уценки через x раз, тогда условие задачи будет выглядеть так:

$$[(120:x):x]:x = \frac{120}{x^3} = 35{,}6.$$

Откуда $x^3 = \dfrac{120}{35{,}6} = 3{,}375,\ x = \sqrt[3]{3{,}75} = 1{,}5.$

Следовательно, в результате первой уценки цена товара будет установлена

120 : 1,5 = 80 у.д.ед,

а в результате второй –

80 : 1,5 = 53,3 у.д.ед.

§ 2. Простые и сложные проценты

Процент – это одна сотая доля величины. Тысячная доля называется промилле. Расчеты, связанные с процентами, производятся по тем же общим правилам, что и для дробей. Величина a в процентах от величины b рассчитывается по формуле:

$$\frac{a}{b} \cdot 100\,\%.$$

Пример 2.6

Вы взяли в банке в кредит 1 млн у.д.ед. на 10 месяцев при ежемесячной кредитной ставке 30 %. Сколько вам придется уплатить за кредит?

Решение

Плата за кредит (Кр) рассчитывается по формуле

$$Кр = В \cdot П \cdot С,$$

где В – величина суммы кредита (первоначального вклада в банк), П – процентная ставка, С – срок кредита.

Подставляя соответствующие цифры, получим:

$$Кр = 10^6 \cdot 0{,}3 \cdot 10 = 10 \text{ млн у.д.ед.}$$

Пример 2.7

Вы получили в банке ссуду на 1 год в размере 5 млн у.д.ед. Ссуда принесла вам годовой доход 100 тыс. у.д.ед.

Какому проценту годовых (норме процента) это соответствует?

Решение

Норма процента (НП) равна: $НП = \frac{Д}{С_с} \cdot 100$, где Д – доход, $С_с$ – величина ссуды.

$$НП = \frac{100\,000}{5\,000\,000} \cdot 100 = 2\,\%.$$

Пример 2.8

В результате первой переоценки товара его цену снизили на 20 %. При второй переоценке новую цену уменьшили еще на 20 %. И, наконец, при сезонной распродаже последнюю цену уменьшили еще на 30 %.

Какова стала продажная цена товара, если первоначально она составляла 1000 у.д.ед.?

Решение

В результате первого снижения цена товара стала равна:

$$1000 - (20\ \%\ \text{от}\ 1000) = 800\ \text{у.д.ед.}$$

В результате второго снижения:

$$800 - (20\ \%\ \text{от}\ 800) = 640\ \text{у.д.ед.}$$

В результате третьего снижения:

$$640 - (30\ \%\ \text{от}\ 640) = 448\ \text{у.д.ед.}$$

Сложные проценты представляют собой величину прирастания определенной суммы, увеличивающейся за определенный срок на некоторый процент с учетом получения процентов на проценты.

Расчет сложных процентов производится по формуле:

$$К = В\,(1 + п)^{С}, \qquad (2.1)$$

где В – исходная величина, К – конечная величина, п – величина процента прирастания за один срок, С – количество сроков прирастания.

Расчет сложных процентов производится с использованием десятичных логарифмов или (быстрее и проще) с помощью табл. 2.1.

Пример 2.9

М.Е. Салтыков-Щедрин описывает в “Господах Головлевых” такую сцену: “Порфирий Владимирович сидит у себя в кабинете, исписывая цифирными выкладками листы бумаги. На этот раз его занимает вопрос: сколько было бы у него теперь денег, если бы маменька подаренные ему при рождении дедушкой “на зубок” сто рублей не присвоила себе, а положила в ломбард на имя малолетнего Порфирия? Выходит, однако, немного: всего восемьсот рублей”.

Таблица 2.1

Таблица сложных процентов

Ставки процентов	Количество сроков нарастания					
	1	2	3	4	5	6 .	.. 12
1 %	1.01	1.0201	1.0303	1.0406	1.0510	1.0615	1.1268
2 %	1.02	1.0404	1.0612	1.0824	1.1041	1.1262	1.2682
3 %	1.03	1.0609	1.0927	1.1255	1.1593	1.1940	1.4258
4 %	1.04	1.0816	1.1249	1.1698	1.2166	1.2653	1.6010
5 %	1.05	1.1025	1.1576	1.2155	1.2763	1.3401	1.7958
6 %	1.06	1.1236	1.1910	1.2625	1.3382	1.4185	2.0122
7 %	1.07	1.1449	1.2250	1.3108	1.4026	1.5007	2.2522
8 %	1.08	1.1664	1.2597	1.3605	1.4693	1.5869	2.5182
9 %	1.09	1.1881	1.2950	1.4116	1.5386	1.6771	2.8127
10 %	1.10	1.2100	1.3310	1.4641	1.6105	1.7716	3.1384
11 %	1.11	1.2321	1.3676	1.5181	1.6850	1.8704	3.4984
12 %	1.12	1.2544	1.4049	1.5735	1.7623	1.9738	3.8960
13 %	1.13	1.2769	1.4429	1.6305	1.8424	2.0820	4.3345
14 %	1.14	1.2996	1.4815	1.6890	1.9254	2.1950	4.8179
15 %	1.15	1.3225	1.5209	1.7490	2.0114	2.3131	5.3502
16 %	1.16	1.3456	1.5609	1.8106	2.1003	2.4364	5.9360
17 %	1.17	1.3689	1.6016	1.8739	2.1924	2.5652	6.5801
18 %	1.18	1.3924	1.6430	1.9388	2.2878	2.6996	7.2876
19 %	1.19	1.4161	1.6852	2.0053	2.3864	2.8398	8.0642
20 %	1.20	1.4400	1.7280	2.0736	2.4883	2.9860	8.9161
21 %	1.21	1.4641	1.7716	2.1436	2.5937	3.1384	9.8497
22 %	1.22	1.4884	1.8158	2.2153	2.7027	3.2973	10.8722
23 %	1.23	1.5129	1.8609	2.2889	2.8153	3.4628	11.9912
24 %	1.24	1.5376	1.9066	2.3642	2.9316	3.6352	13.2148
25 %	1.25	1.5625	1.9531	2.4414	3.0518	3.8147	14.5519
30 %	1.30	1.6900	2.1970	2.8561	3.7129	4.8268	23.2981
35 %	1.35	1.8225	2.4604	3.3215	4.4840	6.0534	36.6441
40 %	1.40	1.9600	2.7440	3.8416	5.3782	7.5295	56.6939
45 %	1.45	2.1025	3.0486	4.4205	6.4097	9.2941	86.3806
50 %	1.50	2.2500	3.3750	5.0625	7.5938	11.3906	129.7463
55 %	1.55	2.4025	3.7239	5.7720	8.9466	13.8672	192.3004
60 %	1.60	2.5600	4.0960	6.5536	10.4858	16.7772	281.4750
65 %	1.65	2.7225	4.4921	7.4120	12.2298	20.1792	407.1995
70 %	1.70	2.8900	4.9130	8.3521	14.1986	24.1376	582.6222
75 %	1.75	3.0625	5.3593	9.3789	16.4131	28.7229	825.0048
80 %	1.80	3.2400	5.8320	10.4976	18.8957	34.0122	1156.8313
85 %	1.85	3.4200	6.3316	11.7135	21.6700	40.0895	1607.1658
90 %	1.90	3.6100	6.8500	13.0321	24.7610	47.0459	2213.3145
95 %	1.95	3.8025	7.4149	14.4590	28.1951	54.9804	3022.8406
100 %	2.00	4.0000	8.0000	16.0000	32.0000	64.0000	4096.0000
110 %	2.10	4.4100	9.2610	19.4481	40.8410	85.7661	7355.8270
120 %	2.20	4.8400	10.6480	23.4256	51.5363	113.3799	12855.0010
130 %	2.30	5.2900	12.1670	27.9841	64.3634	148.0359	21914.6220
140 %	2.40	5.7600	13.8240	33.1776	79.6262	191.1030	36520.3410
150 %	2.50	6.2500	15.6250	39.0625	97.6262	244.1406	59604.6400
160 %	2.60	6.7600	17.5760	45.6976	118.8138	308.9158	95428.9510
170 %	2.70	7.2900	19.6830	53.1441	143.4891	387.4205	150094.6100
180 %	2.80	7.8400	21.9520	16.4656	172.1037	481.8903	232218.2400
190 %	2.90	8.4100	24.3890	70.7281	205.1115	594.8233	353814.7300
200 %	3.00	9.0000	27.0000	81.0000	243.0000	729.0000	531441.0000
250 %	3.50	12.2500	42.8750	150.0625	525.2188	1838.2656	3379220.3000
300 %	4.00	16.0000	64.0000	256.0000	1024.0000	4096.0000	16777216.0000

Попробуйте по приведенным цифрам рассчитать, по сколько процентов платил в то время ломбард по вкладам. Возраст Порфирия в момент его расчетов примем равным пятидесяти годам.

Решение

Обозначив искомый процент по вкладам через x, по формуле сложных процентов получим:

$$800 = 100\,(1 + x)^{50}.$$

Логарифмируя с помощью таблицы логарифмов, получим:

$$\lg 800 = \lg 100 + 50 \lg (1 + x).$$

$$\lg(1+x) = \frac{\lg 800 - \lg 100}{50} = \frac{2{,}9031 - 2{,}0}{50} = 0{,}0164.$$

Антилогарифм $1 + x = 1{,}039$.

$$x = 3{,}9\ \%\,.$$

Сложные проценты рассчитываются и в задачах так называемого *дисконтирования* – приведения денежного капитала к моменту его вложения (инвестирования):

$$\mathrm{K}_t = \mathrm{B}\,(1 + \mathrm{n})^t, \qquad (2.2)$$

где K_t – величина капитала по истечении срока после вложения; B – капитал, вложенный в начале срока; t – количество оборотов капитала; n – процентная ставка или норма доходности (коэффициент дисконтирования).

Пример 2.10

При продаже помещения под офис фирмы продавец предложил предпринимателю два варианта выплат:

10 млн у.д.ед. сразу и по 2 млн у.д.ед. в течение 5 лет, либо

15 млн у.д.ед. сразу и по 1 млн у.д.ед. в течение 6 лет.

Процентная ставка (коэффициент дисконтирования) равна 10 % годовых.

Какой вариант выгоднее? (Проверьте вначале свою интуицию.)

Решение

При первом варианте суммарная выплата, приведенная к моменту продажи (см. табл. 2.1), равна:

$$10+2\frac{1-\frac{1}{(1+0,1)^5}}{0,1}=10+2\frac{1-\frac{1}{1,6105}}{0,1}=10+2\cdot 3,791=17,582 \text{ млн у.д.ед.}$$

При втором варианте:

$$15+1\frac{1-\frac{1}{(1+0,01)^6}}{0,1}=10+1\frac{1-\frac{1}{1,7716}}{0,1}=10+1\cdot 4,356=14,356 \text{ млн у.д.ед.}$$

Следовательно, второй вариант значительно выгоднее.

Пример 2.11

Арендодатель предложил арендатору два варианта уплаты за аренду имущества сроком на 6 лет:

– заплатить сразу 10 млн у.д.ед. и по 1 млн у.д.ед. ежегодно в течение срока аренды; либо

– заплатить сразу 3 млн у.д.ед. и по 2 млн у.д.ед. ежегодно в течение срока аренды.

Процентная ставка (коэффициент дисконтирования) равна 10 % годовых.

В каком случае арендодатель получит к концу срока аренды больший суммарный доход?

Решение

Пользуясь табл. 2.1, находим, что

– при первом варианте суммарный доход равен:

$$10+1\frac{(1+0,1)^6-1}{0,1}=10+1\frac{1,7716-1}{0,1}=10+7,716=17,716;$$

– при втором варианте:

$$3+2\frac{(1+0,1)^6-1}{0,1}=3+2\cdot 7,716=18,432.$$

Второй вариант для арендатора выгоднее.

§ 3. Уравнения

Наиболее часто при решении экономических задач приходится сталкиваться с уравнениями 1-й степени с одним неизвестным, системой из двух уравнений 1-й степени с двумя неизвестными, уравнениями 2-й степени (квадратными) с одним неизвестным, а также с неопределенными (диофантовыми) уравнениями.

Уравнения 1-й степени с одним неизвестным решаются в следующем порядке:

– все члены уравнения приводятся к общему знаменателю;

– все члены уравнения умножаются на общий знаменатель (при этом уравнение освобождается от знаменателей);

– раскрываются скобки и все члены, содержащие неизвестное, собираются в одной части уравнения, а не содержащие – в другой;

– приводятся подобные члены;

– неизвестное находится как частное от деления известного на коэффициент при неизвестном.

Пример 2.12

Наше предприятие отметит свой столетний юбилей тогда, когда пройдет еще половина срока его существования плюс еще треть и плюс четверть этого срока.

Сколько лет нашему предприятию?

Решение

Обозначив возраст предприятия через x, можно записать условие задачи следующим образом:

$$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 100,$$

откуда следует, что $x = 48$ лет.

Пример 2.13

При сушке яблок половина потерянного ими веса оказалась в полтора раза больше веса сушеных яблок.

Сколько весят 4 т яблок после сушки?

Решение

Принимая вес, потерянный яблоками после сушки за x, можно записать условие задачи следующим образом:

$$0{,}5\,x = 1{,}5\,(4 - x),$$

откуда $x = 3$, а искомый вес 4 т яблок после сушки равен $4 - 3 = 1$ т.

Система из двух уравнений 1-й степени с двумя неизвестными решается способом подстановки либо способом уравнивания коэффициентов.

Способ подстановки:

– одно из уравнений решается относительно какого-либо из неизвестных (другие принимаются за известные);

– результаты решения подставляются во второе уравнение, которое теперь становится уравнением 1-й степени с одним неизвестным;

– полученное уравнение 1-й степени с одним неизвестным решается по соответствующим правилам.

Способ уравнивания коэффициентов:

– уравниваются коэффициенты обоих уравнений при каком-либо из неизвестных;

– складывается или вычитается одно уравнение из другого (при этом исключается одно из неизвестных);

– полученное уравнение 1-й степени с одним неизвестным решается по соответствующим правилам.

Пример 2.14

Фирма состоит из двух отделений, суммарная величина прибыли которых в минувшем году составила 13 млн у.д.ед. На этот год запланировано увеличение прибыли первого отделения на 75 %, а второго – на 140 %. В результате суммарная прибыль фирмы должна вырасти в два раза.

Какова величина прибыли каждого из отделений 1) в минувшем году? 2) в этом году?

Решение

Обозначим через x прибыль первого отделения в минувшем году и через y прибыль второго отделения в минувшем году. Тогда условие задачи можно записать следующим образом:

$$x + y = 13,$$
$$1{,}75x + 2{,}4y = 26.$$

Решая систему из двух уравнений с двумя неизвестными, получим:

$$x = 8,\ y = 13 - 8 = 5.$$

Следовательно: 1) прибыль в минувшем году у первого отделения 8 млн у.д.ед., у второго – 5 млн у.д.ед., 2) прибыль в этом году у первого отделения $1{,}75 \cdot 8 = 14$ млн у.д.ед., у второго – $2{,}4 \cdot 5 = 12$ млн у.д.ед.

Пример 2.15

Перед торговым предприятием возникла проблема – в каком соотношении закупать товары А и Б: можно закупить 7 единиц товара А и 5 единиц товара Б – всего за 39 тыс. у.д.ед., а можно, наоборот, закупить 5 единиц товара А и 7 единиц товара Б.

Торговое предприятие остановилось на первом варианте, так как при этом экономится сумма, достаточная для закупки 3-х единиц товара А.

Сколько стоит единица товара А и товара Б?

Решение

Обозначим через x и y соответственно стоимость единиц товаров А и Б. Тогда условие задачи можно записать так:

$$7x + 5y = 39, \qquad (1)$$

$$5x + 7y = 39 + 3x \text{ или } 2x + 7x = 39. \qquad (2)$$

Решим систему из двух уравнений с двумя неизвестными (1) и (2), для чего умножим правые и левые части уравнения (1) на 7, а уравнения (2) на 5:

$$49x + 35y = 273,$$

$$10x + 35y = 195.$$

Вычитая второй результат из первого, получим:

$$39x = 78,\ x = 2 \text{ тыс. у.д.ед.}$$

Из (1) $y = \dfrac{39 - 7 \cdot 2}{5} = 5$ тыс. у.д.ед.

Уравнения 2-й степени (квадратные) с одним неизвестным решаются по следующим правилам:

– уравнение приводится к виду:

$$ax^2 + bx + c = 0;$$

– в случае, если a = 1, уравнение приобретает упрощенную (т.н. приведенную) форму:

$$x^2 + px + q = 0;$$

– решение производится по стандартной формуле:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \qquad (2.3)$$

– или для приведенной формы:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}; \qquad (2.4)$$

– выбор между x_1 и x_2 осуществляется исходя из условий задачи.

Пример 2.16

Автомобили “Волга” и “Жигули” отправились в путь длиной 900 км. Известно, что на это расстояние “Волга” расходует на 36 л бензина больше, чем “Жигули”. Известно также, что пробег на 1 л бензина у “Жигулей” больше, чем у “Волги”, на $6^2/_3$ км.

Сколько бензина израсходует каждая машина?

Решение

Обозначая через x расход бензина у автомобиля “Волга” на 900 км пути, можно записать условие задачи следующим образом:

$$\frac{900}{x-36} - \frac{900}{x} = 6\tfrac{2}{3},$$

что после преобразований приводит к квадратному уравнению вида $ax^2 + bx + c = 0$:

$$\frac{20}{3}x^2 - 240x - 900 \cdot 36 = 0.$$

Решая уравнение по стандартной формуле:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

получим:

$$x_{1,2} = \frac{240 \pm \sqrt{240^2 - 4\,\tfrac{20}{3} \cdot 900 \cdot 36}}{2 \cdot \tfrac{20}{3}} = \frac{240 \pm 960}{\tfrac{40}{3}}; \; x_1 = 90 \text{ л}$$

(второе решение не подходит как отрицательное).

Следовательно, автомобиль “Волга” расходует на весь путь 90 л, а автомобиль “Жигули” – 90 – 36 = 54 л.

П р и м е р 2.17

Фонд заработной платы на предприятии с численностью персонала менее 25 человек составляет 2 млн у.д.ед. В результате увеличения персонала на 15 человек и роста средней заработной платы на 50 тыс. у.д.ед. фонд зарплаты вырос на 3 млн 250 тыс. у.д.ед.

Необходимо рассчитать: 1) какое теперь количество персонала на предприятии? 2) чему теперь равна средняя заработная плата?

Решение

Обозначая через x первоначальное количество персонала предприятия и через y первоначальную среднюю заработную плату, можно записать условия задачи следующим образом:

$$x \cdot y = 2000 \text{ тыс. у.д.ед.};$$

$$(x + 15)(y + 50) = 2000 + 3250.$$

Решая систему из двух уравнений с двумя неизвестными, получим:

$$y = \frac{2000}{x};\ x^2 - 50x + 600 = 0.$$

Решая квадратное уравнение по стандартной формуле, получим:

$$x_{1,2} = \frac{50}{2} \pm \sqrt{\frac{50^2}{4} - 600} = 25 \pm 5,$$

$x_2 = 20$ человек (x_1 не подходит, так как по условию первоначально численность персонала была менее 25 человек).

Следовательно: 1) новое количество персонала равно $20 + 15 = 35$ человек, 2) средняя заработная плата теперь равна $y + 50 = \frac{2000}{20} = 150$ тыс. у.д.ед.

Неопределенные (диофантовые) уравнения представляют особый интерес для решения экономических задач. Неопределенное уравнение имеет вид:

$$\mathrm{a}x + \mathrm{b}y = \mathrm{c}.$$

Поскольку второе уравнение отсутствует, значения x и y становятся неопределенными (таких значений может быть сколько угодно).

Возможность решения неопределенных уравнений появляется лишь тогда, когда возникают дополнительные условия: x и y должны быть целыми и положительными. Эти условия снимают неопределенность, и задача получает решение.

Пример 2.18

Магазин автодеталей приобрел партию шин и такое же количество аккумуляторов. Предполагается, что шины будут продаваться парами. Стоимость пары шин равна стоимости аккумулятора и составляет 2 тыс. у.д.ед.

Товар удалось продать с прибылью 10 %. Остались непроданными семь единиц товара. При этом выручка оказалась равной затратам на покупку.

Какое количество шин и аккумуляторов было приобретено магазином и продано?

Решение

Обозначим через x число приобретенных шин (или аккумуляторов), а через y – число непроданных аккумуляторов. Тогда:

число непроданных шин составит $7 - y$;

число проданных аккумуляторов $x - y$;

число проданных шин $x - (7 - y)$.

Стоимость покупки равна $x \cdot 2 + x \cdot 2 \cdot {}^1/_2 = 3x$.

Стоимость продажи (с учетом прибыли) равна

$$(x - y) \cdot 2{,}2 + [x - (7 - y)] \cdot 2{,}2 \cdot {}^1/_2.$$

Поскольку по условию задачи стоимость продажи равна стоимости покупки, то

$$(x - y) \cdot 2{,}2 + [x - (7 - y)] \cdot 1{,}1 = 3x$$

или, после преобразований,

$$3x = 11y + 77. \qquad (*)$$

Решая последнее уравнение, надо иметь в виду следующие ограничения:

1) x и y – целые числа,

2) x и y – положительны,

3) x и y – меньше 7.

Указанным ограничениям отвечают только значения y, равные 5 или 2 (при всех других значениях $y < 7$, значения x не будут целыми числами).

$y = 2$ не подходит, так как из (*) при этом $x = \dfrac{11 \cdot 5 + 77}{3} = 44$ и нарушается условие продажи шин парами (33 не делится без остатка на 2).

Следовательно, $y = 5$. При этом стоимость покупки составляет $3x = 3 \cdot 44 = 132$ тыс. у.д.ед.

Нетрудно убедиться, что при непроданных пяти аккумуляторах и двух шинах их стоимость составляет:

$$5 \cdot 2{,}2 + 2 \cdot 2{,}2 \cdot {}^1/_2 = 13{,}2 \text{ тыс. у.д.ед.},$$

что как раз равно 0,1 от стоимости покупки, т.е. прибыль действительно равна 10 %.

Пример 2.19

Предприниматель заключил со своим лечащим врачом следующий оригинальный договор: за те дни, когда предприниматель здоров, он выплачивает врачу по 30 тыс. у.д.ед., а за те дни, когда он нездоров, врач платит ему по 20 тыс. у.д.ед.

По истечении некоторого срока врачу пришлось отказаться от продолжения договора: оказалось, он задолжал предпринимателю 100 тыс. у.д.ед.

1) Сколько дней предприниматель был здоров и сколько дней нездоров?

2) Сколько времени продолжалось действие договора?

Решение

Обозначим через x количество дней, когда предприниматель был здоров, а через y – нездоров. Тогда условие задачи можно записать так:

$$x \cdot 30 = y \cdot 20 = 100. \qquad (*)$$

Здесь x и y – целые положительные числа.

Произведем перебор x:

при $x = 1$ выражение (*) будет таким:

$30 + 20y = 100$, откуда $y = \frac{130}{20} = 6{,}5$ (такое дробное значение y не подходит);

при $x = 2$ выражение (*) будет:

$60 + 20y = 100$, откуда $y = \frac{160}{20} = 8$ (это значение y подходит).

Итак: 1) количество дней, когда предприниматель был здоров, равно 2, а когда нездоров – 8; 2) действие договора продолжалось 2 + 8 = 10 дней.

§ 4. Прогрессии и комбинаторика

Прогрессии – это последовательности чисел, построенные по определенным правилам. Прогрессии бывают арифметическими и геометрическими.

В арифметической (или разностной) прогрессии разность двух любых последовательных чисел есть величина постоянная.

Любой (n-й) член такой прогрессии находится по формуле:

$$a_n = a_1 + d\,(n - 1),$$

где a_1 – 1-й член прогрессии, a_n – n-й член прогрессии, d – разность между соседними членами прогрессии.

Сумма всех членов арифметической прогрессии (S_n) находится по формуле:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2}. \tag{2.5}$$

В геометрической (или кратной) прогрессии отношение любых двух соседних членов есть величина постоянная.

Любой (n-й) член геометрической прогрессии находится по формуле:

$$a_n = a_1 q^{n-1}, \tag{2.6}$$

где q – отношение любых двух соседних членов прогрессии.

Сумма всех членов геометрической прогрессии находится по формулам:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \text{ для возрастающей прогрессии,} \tag{2.7}$$

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \text{ для убывающей прогрессии.} \qquad (2.8)$$

Пример 2.20

Товар хороший, но дорогой – 300 у.д.ед. за штуку. Поэтому покупали его редко, и товар стал залеживаться. Если бы продавать его подешевле, наверняка бы расхватали. Вот как это можно сделать. Надо установить цену товара в три раза меньше – по 100 у.д.ед. за штуку. Но каждого покупателя обязать оплатить, помимо стоимости товара, еще два талона на право его приобретения. Покупателям можно объяснить, что, поскольку товар хороший и очень дешевый, эти талоны легко можно будет реализовать – всегда найдется двое желающих купить дешево и хорошо – и вернуть деньги, потраченные на талоны. Не успеете оглянуться, как ваш залежалый товар буквально расхватают.

В этом замечательном предложении есть одна неувязка: вы продаете единицу товара за 300 у.д.ед., а покупатель тратит на нее 100 у.д.ед. Кто оплачивает разницу?

Решение

В первом круге операции участвует один покупатель, во втором – 2, в третьем –4..., в 11 круге – 1024 покупателя. Еще через 10 кругов число участников операции станет более миллиона, в городе не останется покупателей, и те, кто приобрел талоны для распространения, не сумеют их реализовать. Вот эти-то незадачливые покупатели и оплачивают разницу в цене продажи и покупки товара.

Комбинаторика служит для решения задач, связанных с так называемыми соединениями: перестановками, размещениями и сочетаниями различных элементов.

Перестановки из n элементов – это такие соединения, каждое из которых содержит все элементы и которые отличаются друг от друга только порядком расположения элементов.

Число всех возможных перестановок из n элементов (P_n) рассчитывается по формуле:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n = n!, \qquad (2.9)$$

где n! обозначает произведение первых целых чисел до n включительно (так называемый *факториал*).

П р и м е р 2.21

На витрине магазина в ряд можно поставить 14 различных бутылок с напитками.

Сколькими способами это можно сделать? (Попробуйте вначале решить эту задачу на глаз.)

Решение

По формуле комбинаторики число перестановок из элементов (P_n) равно:

$$P_n = n!$$

Отсюда $P_{14} = 14! = 87\ 178\ 291\ 200$ перестановок.

Размещения из n элементов по m – это такие соединения, которые можно образовать из этих n элементов, собирая в каждое по m элементов; при этом соединения должны отличаться друг от друга как самими элементами, так и порядком их расположения.

Число всех возможных размещений из n элементов по m (A_n^m) рассчитывается по формуле:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$$

или

$$A_n^m = \frac{m!}{(n-m)!}. \qquad (2.10)$$

П р и м е р 2.22

В конкурсе участвуют 10 фирм, из которых жюри должно выбрать три фирмы на 1, 2 и 3-е места.

Сколько вариантов решения жюри существует? (Попробуйте вначале решить эту задачу на глаз.)

Решение

По формуле комбинаторики:

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = 720 \text{ способов.}$$

Сочетания из n элементов по m – это такие соединения, которые можно образовать из этих n элементов, собирая в каждое m элементов; при этом соединения должны отличаться друг от друга только самими элементами (порядок расположения элементов значения не имеет).

Число всех возможных сочетаний из n элементов по m (C_n^m) рассчитывается по формуле:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_n}$$

или

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \qquad (2.11)$$

П р и м е р 2.23

Стало известно, что на малом предприятии с численностью работающих 24 человека четверо являются бандой преступников.

Сколько таких возможных четверок необходимо проверить правоохранительным органам?

Решение

По формуле комбинаторики:

$$C_{24}^4 = \frac{24!}{4!(24-4)!} = 10\,626 \text{ “четверок”}.$$

§ 5. Функции и графики

Решение многих экономических задач строится на рассмотрении зависимостей экономических величин от различных факторов. Зависимую величину называют *функцией*, а ту, от которой она зависит, – *аргументом*.

Например, можно сказать, что прибыль является функцией от дохода или что цена товара есть функция от затрат на его производство.

Функции обычно характеризуются математическими зависимостями, которые удобно представить в виде наглядных *графиков*.

В тех случаях, когда нет возможности представить функцию в виде математической формулы, построению графиков предшествует составление таблицы, содержащей данные об интересующей нас зависимости.

Пример 2.24

Вы продаете товар по 1000 у.д.ед. за штуку. Затраты на единицу товара составляют 750 у.д.ед.

Чему равна ваша прибыль и норма прибыли (рентабельность)?

Решение

Норма прибыли (рентабельность) рассчитывается по формуле:

$$\text{НРПР} = \frac{\text{ПР}}{\text{З}} \cdot 100\,\%, \qquad (*)$$

где НРПР – норма прибыли (функция), ПР – прибыль, З – затраты.

ПР = 1000 у.д.ед. – 750 у.д.ед. = 250 у.д.ед.

$$\text{НРПР} = \frac{250}{750} \cdot 100 = 33\,\%.$$

По формуле (*) строится график (рис 2.1) нормы прибыли (функция) в зависимости от величины прибыли (аргумент) при постоянных затратах (примем З = 750 у.д.ед.).

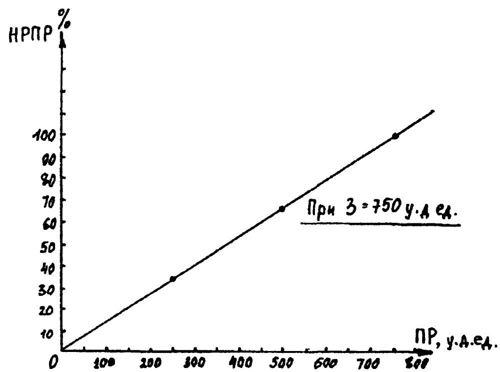

Рис. 2.1. График нормы прибыли

Пример 2.25

Рассмотрим спрос на мороженое в ларьке за один день.

Таблица 2.2

Цена за одну порцию, у.д.ед.	Величина спроса мороженого, порций за один день
600	60
650	35
700	25
750	15
800	10

Необходимо построить график спроса.

Решение

По данным табл. 2.2 построим график спроса (рис 2.2). График представляет собой кривую обратно пропорциональной зависимости, что соответствует закону спроса. (По традиции аргументы здесь откладываются по оси Y, а функции – по оси X.)

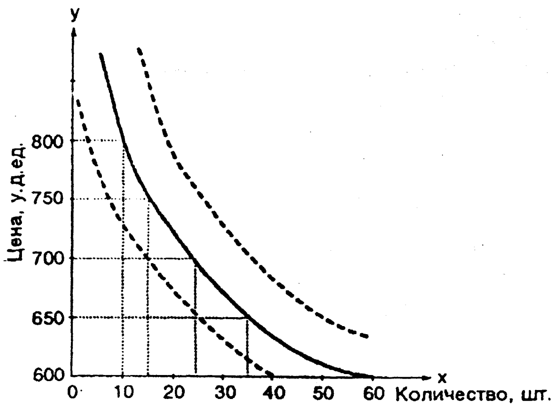

Рис. 2.2. График спроса

Когда говорят об изменении спроса на товар, имеют в виду смещение в ту или иную сторону всей кривой (или новые значения цен, соответствующие количеству продаваемого товара).

§ 6. Геометрия

Решение ряда экономических задач связано с расчетами пространственных характеристик объектов и поэтому требует применения математического аппарата геометрии.

Приведем некоторые наиболее часто употребляемые в экономике геометрические формулы.

Теорема Пифагора:

$$c^2 = a^2 + b^2, \qquad (2.12)$$

где c – гипотенуза, a и b – катеты прямоугольного треугольника.

Площадь (S) прямоугольника:

$$S = a \cdot b,$$

где a и b – длины малых и больших сторон прямоугольника, соответственно.

Площадь треугольника:

$$S = {}^1/_2 a \cdot h, \qquad (2.13)$$

где a – длина основания, h – высота.

Площадь трапеции:

$$S = \frac{(a_1 + a_2) \cdot h}{2},$$

где a_1 и a_2 – основания, h – высота.

Длина окружности (L):

$$L = 2\pi R, \qquad (2.14)$$

где $\pi = 3{,}14$, R – радиус.

Площадь окружности:

$$S = \pi R^2. \qquad (2.15)$$

Площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда:

$$S = 2(ab + bc + ca),$$

где a, b, c – длина, ширина и высота параллелепипеда.

Площадь поверхности шара:

$$S = 4\pi R^2. \qquad (2.16)$$

Площадь поверхности цилиндра:

$$S = 2\pi R\,(H + R), \qquad (2.17)$$

где H – высота цилиндра.

Площадь поверхности конуса:

$$S = \pi R\,(\ell + R), \qquad (2.18)$$

где ℓ – образующая конуса.

Объем прямоугольного параллелепипеда (V):

$$V = a \cdot b \cdot c. \qquad (2.19)$$

Объем шара:

$$V = {}^4/_3\pi R^3. \qquad (2.20)$$

Объем цилиндра:

$$V = \pi R^2 H. \qquad (2.21)$$

Объем конуса:

$$V = {}^1/_3\pi R^2 H. \qquad (2.22)$$

Пример 2.26

Предприниматель приобрел дорогостоящую нить, свернутую в клубок в форме шара, диаметром 0,6 м. Толщина нити 0,2 мм. Было решено для продажи перемотать нить на катушки, вмещающие 100 м.

Сколько потребуется таких катушек? (Попробуйте вначале решить эту задачу на глаз.)

Решение

Прежде всего найдем высоту прилегающего к шару цилиндра, равного шару по объему.

Объем шара равен $4/3\pi R^3$, где R – радиус шара.

Объем прилегающего цилиндра, имеющего высоту, равную диаметру шара (т.н. описанный цилиндр), равен $2\pi R^3$.

Отношение объема шара и цилиндра будет:

$$\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{2\pi R^3}=\frac{2}{3}.$$

Следовательно, для того чтобы прилегающий к шару цилиндр имел объем, равный объему шара, высота цилиндра должна составлять $^2/_3$ от диаметра шара, т.е. $^2/_3 \cdot 0,6 = 0,4$ м.

Теперь задача сводится к нахождению суммарной длины того количества отрезков нити длиной по 0,4 м, которые укладываются в цилиндр с диаметром основания 0,6 м (как в пачке вермишели).

Площадь основания цилиндра равна $\pi R^2 = \pi\,(0,3\text{ м})^2$.

Площадь сечения нити $\pi\,(0,1\text{ мм})^2$.

Количество отрезков нити, укладывающихся в наш цилиндр, равно:

$$\frac{\pi\,(0,3\,\text{м})^2}{\pi\,(0,1\,\text{м})^2}=\frac{(300\,\text{мм})^2}{(0,1\,\text{мм})^2}=\frac{90\,000\,\text{мм}^2}{0,01\,\text{мм}^2}=9\cdot 10^6\text{ отрезков.}$$

Длина нити равна суммарной длине этих отрезков, т.е. $9 \cdot 10^6 \cdot 0,4$ м $= 3\,600\,000$ м, или 3600 км.

Количество катушек, необходимое, чтобы смотать эту нить, равно:

$$\frac{3600\,\text{км}}{100\,\text{м}}=36\,000.$$

§ 7. *Логические задачи и задачи на смекалку*

Решение весьма многих и трудных экономических задач, помимо математики, требует использовать логику и невозможно без привлечения смекалки.

Пример 2.27

Вам предстоит заключить сделку с некой компанией, причем по отношению к вам сделка в равной степени может быть как честной, так и нечестной. Переговоры с вами ведет представитель компании, намерения которой ему известны. При этом сам он может оказаться как правдивым человеком, так и лжецом. Честна ли готовящаяся сделка и правдив ли данный представитель компании – неизвестно.

Какой единственный вопрос достаточно задать представителю компании, чтобы по ответу безошибочно судить о его честности (на вопросы он может отвечать лишь “да” или “нет”)?

Решение

Это вопрос: “Соответствует ли Ваша правдивость честности компании?” Правдивый представитель при честной сделке на этот вопрос ответит “да”, а при нечестной – “нет”; лживый же будет отвечать противоположно истине: если честность сделки и правдивость представителя не совпадают, он вместо “нет” ответит “да”, и наоборот. Возможные ситуации и соответствующие ответы сведены в следующую таблицу:

Возможные ситуации		Ответы
Сделка	Представитель	
Честная	Правдивый	да
Нечестная	Правдивый	нет
Честная	Лжец	да
Нечестная	Лжец	нет

Из таблицы видно, что каким бы ни был представитель компании, положительный ответ всегда говорит о честности сделки, а отрицательный – о ее нечестности.

Пример 2.28

Вам предлагают выбрать квартиру в строящемся доме на третьем либо на шестом этаже. При сравнении качества квартир возникает вопрос: во сколько раз путь по лестнице на шестой этаж длиннее, чем на третий (число ступенек между этажами одинаково)?

Решение

До 3-го этажа 2 пролета лестниц, до 6-го – 5. Следовательно, $^5/_2 = 2{,}5$, т. е. в два с половиной раза.

ГЛАВА 3. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ В ЭКОНОМИКЕ

§ 1. Методы оптимизации: линейное, нелинейное и динамическое программирование (планирование)

Успешность решения подавляющего большинства экономических задач зависит от наилучшего, наивыгоднейшего способа использования ресурсов. В процессе экономической деятельности приходится распределять такие важные ресурсы, как деньги, товары, сырье, оборудование, рабочую силу и др. И от того, как будут распределяться эти, как правило, ограниченные ресурсы, зависит конечный результат деятельности, бизнеса.

Суть *методов оптимизации* заключается в том, что исходя из наличия определенных ресурсов выбирается такой способ их использования (распределения), при котором обеспечивается максимум (или минимум) интересующего нас показателя.

При этом учитываются определенные ограничения, налагаемые на использование ресурсов условиями экономической ситуации.

В качестве методов оптимизации в экономике находят применение все основные разделы математического программирования (планирования): линейное, нелинейное и динамическое.

Линейное программирование (планирование)

Линейное программирование (планирование) – математический метод отыскания максимума или минимума линейной функции при наличии ограничений в виде линейных неравенств или уравнений. (Линейное здесь означает, что на графике функции изображаются в виде прямых линий, обозначающих 1-е степени соответствующих величин.)

Максимизируемая (минимизируемая) функция представляет собой принятый критерий эффективности решения задачи, соответствующий поставленной цели. Она носит название *целевой функции*.

Ограничения характеризуют имеющиеся возможности решения задачи.

Существо решения задач линейного программирования заключается в нахождении условий, обращающих целевую функцию в минимум или максимум.

Решение, удовлетворяющее условиям задачи и соответствующее намеченной цели, называется *оптимальным планом*.

Линейное программирование (планирование) служит для выбора наилучшего плана распределения ограниченных однородных ресурсов в целях решения поставленной задачи.

В общем виде постановка задачи линейного программирования заключается в следующем.

Условия задачи представляются с помощью системы линейных уравнений или неравенств, выражающих ограничения, налагаемые на использование имеющихся ресурсов:

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i; \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m; \\ &j = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots, m;\ m < n;\ x_j \geq 0, \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

где x_j – искомые величины, содержащие решение поставленной задачи; a_{ij} и b_i – известные постоянные величины, характеризующие условия задачи.

Целевая функция (линейная форма) задается в виде

$$\left.\begin{aligned} &y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j + \ldots + c_nx_n \\ &j = 1, 2, \ldots, n, \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

где c_j – постоянные коэффициенты (коэффициенты стоимости).

Условия задачи (ограничения) могут быть заданы также в виде неравенств. В этих случаях можно привести систему линейных ограничений к виду (3.1), вводя в каждое линейное ограничение дополнительные неотрицательные неизвестные:

$$x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}.$$

Целевая установка оптимизации заключается в том, чтобы свести ожидаемые при решении данной задачи издержки предприятий к минимуму.

Общая математическая формулировка задачи соответствует условиям (3.1) и (3.2).

Первая строка системы уравнений (3.1)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

в данном примере означает следующее:

a_{11} – количество единиц ресурсов вида 1 на первом предприятии;

a_{12} – количество единиц ресурсов вида 1 на втором предприятии и т.п.;

b_1 – общий ресурс ресурсов вида 1 (для всех предприятий);

x_1, x_2 и т.д. – искомое количество предприятий типов 1, 2 и т.д.

Вторая строка упомянутой системы уравнений содержит аналогичные величины для ресурсов вида 2 и т.д. Функция цели соответствует формуле (3.2). Требуется обратить в минимум величину

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j + \ldots + c_nx_n,$$

где c_j – показатель, характеризующий издержки предприятий.

Пусть m – общее число различных видов ресурсов, которыми располагает собственник, а n – число типов предприятий, между которыми эти ресурсы должны быть распределены. При этом известно, какое количество однородных ресурсов различного вида (i = 1, 2… m) может быть реализовано на каждом из предприятий данного типа (j = 1, 2… n), а также общее количество ресурсов данного вида (b_i). Известно также относительное значение издержек на каждом из предприятий (c_j).

Задача заключается в том, чтобы наилучшим (оптимальным) образом распределить имеющиеся ресурсы по предприятиям, т.е. найти неизвестные величины x_j – требуемые для этого количества предприятий данного типа.

Пример 3.1

Собственник располагает четырьмя видами ресурсов (m = 4). Это, например, денежные средства, производственные помещения, оборудование, сырье. Ресурсы необходимо распределить между шестью предприятиями (n = 6). Предприятия различаются по экономическим условиям деятельности: месту расположения, системе налогообложения, стоимости энергии, оплате труда и т.д., в связи с чем имеют разные издержки производства. Относительные уровни издержек заданы табл. 3.1.

Таблица 3.1

Относительные уровни издержек на предприятиях

Предприятия	1	2	3	4	5	6
Издержки	0,4	0,5	0,2	0,8	0,6	0,3

Распределение ресурсов по предприятиям сопряжено с необходимостью учета ряда ограничений, которые могут быть описаны системой четырех уравнений с шестью неизвестными, аналогичной системе (3.1):

$$\left.\begin{aligned} &\text{1-й вид ресурсов } 4x_1 + x_4 = 16; \\ &\text{2-й вид ресурсов } 2x_2 + x_5 = 10; \\ &\text{3-й вид ресурсов } x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 76; \\ &\text{4-й вид ресурсов } 4x_1 + 3x_2 + x_6 = 24; \\ &\qquad\qquad x_j \geq 0\ (j = 1, 2, \ldots, 4). \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

Смысл первого уравнения в нашем примере в том, что ресурс вида 1, общий ресурс которого составляет 16 единиц, может размещаться в количестве четырех единиц на предприятии первого типа и одной единицы – на предприятии четвертого типа. Аналогично раскрывается смысл второго и последующих уравнений. Последнее условие говорит о том, что число предприятий не может быть отрицательным.

Необходимо определить, какое количество предприятий каждого типа следует иметь, чтобы общие издержки были минимальными.

В соответствии с табл. 3.1 целевая функция, подлежащая оптимизации, примет вид

$$y = 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}2x_3 + 0{,}8x_4 + 0{,}6x_5 + 0{,}3x_6. \qquad (3.4)$$

Решение

Решение задачи сводится к выполнению ограничений, заданных уравнениями (3.3), с учетом условия минимизации выражения (3.4).

В нашем примере, когда n – m = 2, каждое из ограничительных линейных уравнений (3.3), а также линейная функция (3.4) могут быть представлены геометрически в двухмерном пространстве (на плоскости).

Чтобы представить ограничения и целевую функцию на графике, необходимо выразить все известные через независимые величины. Например, x_1 и x_2, соответствующие координатным осям, относительно которых будет производиться построение (рис. 3.1).

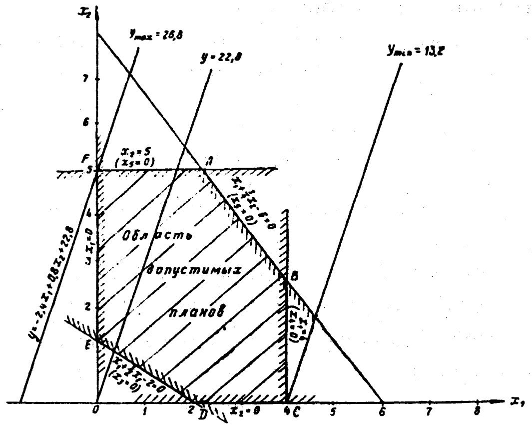

Рис. 3.1

Из уравнений (3.3) следует:

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= 8x_1 + 12x_2 - 16; \\ x_4 &= 16 - 4x_1; \\ x_5 &= 10 - 2x_2; \\ x_6 &= 24 - 4x_1 - 3x_2. \end{aligned}\right\} \qquad (3.5)$$

Целевая функция примет вид

$$y = -2{,}4x_1 + 0{,}8x_2 + 22{,}8. \qquad (3.6)$$

Из сопоставления уравнения (3.5) и последнего из ограничений (3.1) $x_j \geq 0$ следует:

$$\left.\begin{aligned} & x_1 \geq 0; \\ & x_2 \geq 0; \\ & x_3 = 8x_1 + 12x_2 - 16 \geq 0; \\ & x_4 = 16 - 4x_1 \geq 0; \\ & x_5 = 10 - 2x_2 \geq 0; \\ & x_6 = 24 - 4x_1 - 3x_2 \geq 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3.7)$$

Каждому из неравенств (3.7) на графике рис. 3.1 соответствует полуплоскость, в пределах которой находятся все допускаемые данным неравенством значения переменной величины x_j ($j = 1, 2, ..., 6$).

Так, неравенству $x_1 \geq 0$ соответствует полуплоскость вправо от оси x_2 (граница ее заштрихована).

Неравенству $x_3 = 8x_1 + 12x_2 - 16 \geq 0$ соответствует полуплоскость вправо и вверх от линии граничного значения данного неравенства (при $x_3 = 0$). Уравнение этой линии

$$x_1 + \frac{3}{2}x_2 - 2 = 0.$$

Таким же образом можно построить границы, определяемые другими уравнениями.

Неравенствам (3.7) соответствует некоторая область – шестиугольник ABCDEF, образованный границами упомянутых выше полуплоскостей. Эта область может быть названа областью допустимых планов, поскольку любая точка в ее пределах отвечает требованиям наложенных ограничений (3.3).

Из всех допустимых планов нас интересует оптимальный план, при котором функция цели y достигает минимума.

Целевой функции соответствует семейство параллельных прямых. Рассмотрим одну из них, проходящую через начало координат, что будет иметь место при $y = 22{,}8$. При этом $x_2 = 3x_1$.

Интересующая нас прямая $y = 22{,}8$, как видно из рис. 3.1, имеет наклон вправо от оси x_2. Задаваясь различными значениями y, получим семейство прямых линий, параллельных прямой

$y = 22{,}8$, проходящей через точку 0. При этом чем меньше будет значение y, тем, очевидно, правее будет располагаться соответствующая прямая.

Поскольку мы добиваемся минимального значения y, то нас будет интересовать прямая, расположенная в наибольшем удалении вправо от прямой $y = 22{,}8$ и проходящая через многоугольник ABCDEF, – прямая y_{min}.

Единственной точкой, соответствующей оптимальному плану, будет та вершина многоугольника ABCDEF (рис. 3.1), которая одновременно принадлежит области допустимых планов и отвечает требованию минимизации целевой функции y, – вершина C. Из уравнения прямой BC, проходящей через точку C, следует, что $x_1 = 4$. Из уравнения прямой DC, проходящей через ту же точку, следует, что $x_2 = 0$.

Подставляя полученные значения $x_1 = 4$ и $x_2 = 0$ в уравнения (3.5), определим величины остальных переменных, составляющих оптимальный план:

$$x_3 = 16;$$
$$x_4 = 0;$$
$$x_5 = 10;$$
$$x_6 = 8.$$

Таким образом, оптимальный план будет следующим:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 4; \\ x_2 &= 0; \\ x_3 &= 16; \\ x_4 &= 0; \\ x_5 &= 10; \\ x_6 &= 8. \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

Линейная форма (величина издержек) при этом будет минимальной:

$$y = -\frac{24}{10} \cdot 4 + \frac{8}{10} \cdot 0 + \frac{228}{10} = \frac{132}{10} = 13{,}2. \tag{3.9}$$

На практике встречается ряд задач, аналогичных рассмотренному примеру, но требующих максимизации целевой функции (например, величины дохода или прибыли).

При решении этих задач целевая функция рассчитывается по формуле, аналогичной (3.2):

$$y^* = c_1^* x_1 + c_2^* x_2 + \ldots + c_j^* x_j + c_n^* x_n, \tag{3.10}$$

где y^* – целевая функция, подлежащая максимизации. Отличие заключается в том, что знаки перед всеми постоянными коэффициентами меняются на обратные ($c^*_j = -c^*_j$).

Вычислительные методы линейного программирования

Рассмотренная геометрическая интерпретация задачи линейного программирования возможна лишь при наличии двух независимых переменных. При трех переменных наглядное представление существенно усложняется, так как в этом случае имеет место некоторый выпуклый многогранник в трехмерном пространстве, соответствующий объему допустимых планов.

При количестве переменных более трех задача теряет геометрическую наглядность, так как трудно представить себе, например, четырехмерное пространство. Однако идея получения решения, рассмотренного выше, сохраняет смысл и для случая многомерного пространства.

На основе этой идеи создан и разработан один из основных методов решения задач линейного программирования–так называемый симплекс-метод.

Симплекс-метод является алгебраической формой решения задачи линейного программирования, вытекающей из только что рассмотренного геометрического представления. При обосновании симплекс-метода будем прибегать к уже рассмотренному выше двухмерному случаю, что позволит достаточно просто перейти от геометрического представления к его алгебраической аналогии.

Первый шаг. Найти допустимый план, соответствующий одной из вершин области допустимых планов.

Второй шаг. Проверить, оптимален ли найденный план. Если оптимален, вычисления окончены. Если нет – следующий план.

Третий шаг. Переход к другой вершине (другому допустимому плану), в которой значение целевой функции меньше, проверка его на оптимальность и т.д.

Поэтому первым шагом должно быть получение координат одной из вершин многоугольника (многогранника) допустимых планов. Для этого необходимо преобразовать систему уравнений таким образом, чтобы с ее помощью можно было легко получать координаты вершин многоугольника (многогранника) области допустимых планов.

Анализируя рис. 3.1, можно заметить, что в каждой из вершин две из переменных обращаются в нуль. Поэтому мы должны принять две переменные равными нулю, а затем найти остальные четыре из системы уравнений (3.3). В совокупности все переменные дадут один из допустимых планов, соответствующих некоторой вершине.

Чтобы преобразовать систему уравнений описанным образом, необходимо выразить каждую из неизвестных $x_1, x_2, ..., x_m$ через остальные.

Такая возможность существует лишь в случае, если определитель

$$\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \dots a_{1m} \\ a_{21}\ a_{22} \dots a_{2m} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\ a_{m2} \dots a_{mm} \end{pmatrix} \neq 0. \qquad (3.11)$$

Если это условие выполняется, то величины $x_1, x_2, ..., x_m$ называют базисными. Каждый базис соответствует определенной вершине.

Преобразуем систему уравнений (3.3) так, чтобы, приравнивая две переменные нулю (например, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$), можно было получить значение базисных величин x_1, x_2, x_3 и x_4 – координаты одной из вершин многоугольника.

Предварительно убедимся, что определитель, составленный из коэффициентов при этих неизвестных в уравнениях (3.3), не равен нулю.

Действительно,

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 8.$$

Это дает нам право считать, что величины x_1, x_2, x_3 и x_4 являются базисными и система (3.3) может быть разрешена относительно их.

Все необходимые преобразования будем производить с матрицей коэффициентов уравнений (3.3):

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & 0 & 76 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 24 \end{pmatrix}. \qquad (3.12)$$

Преобразуем матрицу (3.12) в соответствии с указанным выше требованием получения базисных значений переменных величин. Для этого необходимо выполнить над ней такие преобразования, чтобы базисные переменные остались по одной в каждом из уравнений (строке матрицы), а коэффициенты при них были равны единице. Начинаем с коэффициента при x_1 в первом уравнении. Чтобы сделать его равным единице, делим все коэффициенты первого уравнения на четыре. Для исключения переменной x_1 из остальных уравнений отнимаем от каждого из них первое уравнение, умноженное на такое число, при котором разность коэффициентов при x_1 была бы равна нулю. Например, второе и третье уравнения (строки) нужно умножить на нуль, четвертое – на единицу.

В результате преобразований получим:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & 0 & 76 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}. \qquad (3.13)$$

Аналогичные преобразования выполняем для переменной x_2 во второй строке:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & 0 & 76 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{3}{2} & 1 & -7 \end{pmatrix}. \qquad (3.14)$$

Для переменной x_3 в третьей строке и x_4 – в четвертой:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 62 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1 & 7 \end{pmatrix}. \qquad (3.15)$$

Выполненная процедура носит название метода полного исключения (так называемое Жорданово исключение).

Теперь, приравнивая переменные x_5 и x_6 (соответственно пятый и шестой столбцы матрицы) нулю, можем написать значения базисных переменных, которые будут в этом случае равны свободным членам соответствующих уравнений:

$$x_1 = \frac{9}{4};$$
$$x_2 = 5;$$
$$x_3 = 62;$$
$$x_4 = 7.$$

Обращаясь к геометрической интерпретации (см. рис. 3.1), можно убедиться, что полученные координаты $x_1 = 2^1/_4$, $x_2 = 5$, $x_5 = x_6 = 0$ соответствуют вершине A многоугольника ABCDEF – области допустимых планов. Это и есть первый допустимый план.

Теперь можно перейти ко второму шагу симплекс-метода – установлению того, является ли допустимый план, соответствующий найденной вершине A, оптимальным.

Наиболее естественным путем решения этой задачи был бы сплошной перебор всех вершин области допустимых планов, определение для каждой из них значений переменных x_j (j = 1, 2, ..., 6) и вычисление по ним в каждой вершине величины целевой функции.

Та вершина, в которой величина y оказалась бы минимальной, и даст искомый оптимальный план.

Но этот путь весьма неэкономичный, ибо требует просчитать большое количество планов, в том числе и явно неоптимальных.

Симплекс-метод предусматривает поэтому не сплошной, а направленный перебор планов, при котором каждый последующий план оказывается лучше предыдущего. Число вычислительных операций при этом резко сокращается.

В чем сущность направленного перебора?

В первом допустимом плане, соответствующем вершине А, целевая функция в соответствии с формулой (3.6) равна:

$$y_A = -2{,}4x_1 + 0{,}8x_2 + 22{,}8 = -2{,}4 \cdot \frac{9}{4} + 0{,}8 \cdot 5 + 22{,}8 = 21{,}4.$$

Мы уже знаем из выражения (3.9), что y_{min} = 13,2. Следовательно, целевая функция в точке А значительно больше минимума и необходимо продолжать перебор вершин-планов до тех пор, пока не придем к оптимальному.

Из вершины А можно перейти к соседним вершинам F и B (см. рис. 3.1), двигаясь по сторонам многоугольника AF и AB соответственно. Видимо, нужно избрать такое направление перехода к соседней вершине, которое приведет к наибольшему уменьшению целевой функции.

Рассчитаем значения целевой функции для соседних вершин F и B. Пользуясь формулой (3.6) и подставляя соответствующие значения x_1 и x_2, получим:

$$y_F = -2{,}4 \cdot 0 + 0{,}8 \cdot 5 + 22{,}8 = 26{,}8;$$

$$y_B = -2{,}4 \cdot 4 + 0{,}8 \cdot {}^8/_3 + 22{,}8 = 15{,}33.$$

Сопоставляя два последних выражения, нетрудно убедиться, что минимизация функции цели достигается при движении к точке В по стороне АВ. Это означает, что в базис вводится переменная x_5, которая в вершине А была равна нулю.

Поскольку при отсутствии наглядного геометрического представления заранее нельзя располагать значениями переменных в вершинах многоугольника, то для установления необходимости и направления перебора планов пользуются специальным критерием δ_j:

$$\delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j, \tag{3.16}$$

где индекс j приписывается небазисным (нулевым) переменным, а индекс i – базисным. Для получения значений коэффициента c_i целевая функция y_A преобразуется таким образом, чтобы исключить из нее небазисные переменные x_5 и x_6:

$$y_A = -2{,}4x_1 + 0{,}8x_2 + 22{,}8 = -0{,}8x_1 - 1{,}6x_2 + 0{,}2x_3 + 0{,}8x_4 + 72.$$

Значения a_{ij} выбираются из соответствующих столбцов матрицы (3.15).

Имеется доказательство того, что в случае оптимальности полученного плана все δ_j, становятся равными нулю или меньше нуля. Включению в базис подлежит та переменная, для которой δ_j принимает наибольшее положительное значение. В нашем примере это:

$$\delta_5 = c_1 a_{15} + c_2 a_{25} + c_3 a_{25} + c_4 a_{25} - 0 =$$

$$= -\frac{8}{10}\cdot\left(-\frac{3}{8}\right) + \left(-\frac{16}{10}\right)\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{10}\cdot 3 + \frac{8}{10}\cdot\frac{3}{2} - 0 = \frac{13}{10};$$

$$\delta_6 = -\frac{8}{10}\cdot\frac{1}{4} - \frac{16}{10}\cdot 0 + \frac{2}{10}\cdot 2 - \frac{8}{10}\cdot(-1) - 0 = -\frac{3}{5}.$$

Таким образом, мы приходим к тому же заключению о необходимости включения в базис переменной x_5, для которой критерий имеет наибольшее положительное значение.

Далее необходимо установить, какая переменная должна быть выведена из базиса при введении в него переменной x_5. Чтобы ответить на этот вопрос, будем рассуждать так.

Очевидно, следует переместиться по стороне AB как можно дальше от точки A, чтобы как можно больше уменьшить целевую функцию. Стало быть, можно взять в качестве координаты x_1 точки B ее максимальное возможное значение, допускаемое системой уравнений (3.5), соответствующей матрице (3.15), т.е. такое, при котором ни одна из переменных не становится отрицательной.

Можно показать, что это достигается в том случае, если вывести из базиса переменную, которой соответствует минимальное положительное значение отношения свободного члена уравнения к коэффициенту при x_5 в соответствующем столбце матрицы (3.15).

Поэтому избирается четвертая строка матрицы и соответственно переменная x_4, подлежащая исключению из базиса.

Теперь необходимо получить в четвертой строке значение коэффициента при новой базисной величине x_5, равного единице, а все остальные коэффициенты этого столбца обратить в нуль. Для этого проверяем вычислительную процедуру полного исключения.

Получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 48 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{14}{3} \end{pmatrix}. \qquad (3.17)$$

Данной матрице отвечает допустимый план в вершине В. Приравнивая небазисные переменные нулю ($x_4 = x_6 = 0$), получаем значения остальных переменных, соответствующих второму плану:

$$x_1 = 4; \quad x_3 = 48;$$
$$x_2 = \frac{8}{3}; \quad x_5 = \frac{14}{3}.$$

Как уже было показано, $y_В = 15^1/_3$. Итак, получено существенное сокращение целевой функции, однако критерий δ_6 продолжает оставаться положительным, что говорит о необходимости дальнейшего улучшения плана:

$$\delta_4 = -\frac{2}{3}; \quad \delta_6 = \frac{3}{10}.$$

На этот раз в базис вводится переменная x_4, а выводится переменная x_2, которой соответствует наименьшее значение коэффициента в столбце x_6.

После преобразования матрицы (3.17) получаем матрицу (3.18), отвечающую третьему плану:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & -12 & 1 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 2 & 0 & \frac{2}{3} & 1 & 0 & 10 \end{pmatrix}. \qquad (3.18)$$

Данный план соответствует вершине C:

$$x_1 = 4; \qquad x_4 = 0;$$
$$x_2 = 0; \qquad x_5 = 10;$$
$$x_3 = 16; \qquad x_6 = 8.$$

Критерии δ для данного плана равны:

$$\delta_2 = -\frac{4}{5}; \quad \delta_4 = -\frac{2}{5}.$$

Поскольку нет ни одного положительного критерия, то третий план и является оптимальным, что следует из рис. 3.1.

Целевая функция при данном плане равна:

$$y_C = 13{,}2.$$

Итак, мы пришли аналитическим путем к тому же оптимальному плану, который был ранее получен геометрическим способом.

Решение примера 3.1 можно сформулировать следующим образом.

Чтобы издержки при распределении ресурсов между предприятиями были минимальными, количество предприятий первого типа должно быть равно 4, второго – 0, третьего – 16, четвертого – 0, пятого – 10, шестого – 8.

При этом издержки будут составлять 13,2 единицы.

Важно отметить, что наихудший план распределения, соответствующий точке F, приводит к потере 26,8 единицы. Таким образом, без дополнительного расходования ресурсов (только за счет их рационального распределения) улучшен результат решения задачи более чем в два раза.

Рассмотренная вычислительная процедура, как было отмечено, сводится к решению системы уравнений (3.3) методом последовательного исключения неизвестных. Для такого решения в математике с успехом применяется аппарат матричной алгебры, который позволяет наиболее экономно производить требуемые вычисления.

Техника решения системы уравнений (3.3) с помощью матриц заключается в следующем.

Исходную систему уравнений (3.3) можно компактно представить как матричное уравнение такого вида:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{S}, \tag{3.19}$$

где **A**, **X** и **S** – некоторые матрицы.

Матрица **A** содержит коэффициенты при переменных в уравнении (3.3):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.20}$$

Матрица **X** содержит переменные величины этого уравнения:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}. \tag{3.21}$$

Матрица **S** содержит свободные члены того же уравнения:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 16 \\ 10 \\ 76 \\ 24 \end{pmatrix}. \tag{3.22}$$

Уравнение целевой функции (3.4) в матричном виде можно представить так:

$$y = \mathbf{CX}, \tag{3.23}$$

где **C** – матрица, содержащая коэффициенты при переменных в уравнении (3.4).

$$\mathbf{C} = (0{,}4;\ 0{,}5;\ 0{,}2;\ 0{,}8;\ 0{,}6;\ 0{,}3). \tag{3.24}$$

Разобьем матрицы **A**, **X** и **C** на подматрицы (клетки) в соответствии с принятым базисным решением – исходным (или опорным) планом.

Матрица **A** разбивается на подматрицы $\mathbf{A}_0$ и $\mathbf{A}_s$, причем $\mathbf{A}_0$ содержит столбцы, соответствующие коэффициентам при переменных x_5 и x_6, равных нулю, а матрица $\mathbf{A}_s$ представляет собой столбцы, соответствующие коэффициентам при остальных (базисных) переменных:

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \tag{3.25}$$

$$\mathbf{A}_s = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.26}$$

Матрица **X** разбивается на подматрицы $\mathbf{X}_0$ и $\mathbf{X}_s$, причем $\mathbf{X}_0$ содержит значения переменных, равных нулю, а $\mathbf{X}_s$ – значения остальных (базисных) переменных:

$$\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \tag{3.27}$$

$$\mathbf{X}_s = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 10 \\ 76 \\ 24 \end{pmatrix}. \tag{3.28}$$

Матрица **C** разбивается на подматрицы $\mathbf{C}_0$ и $\mathbf{C}_s$, причем $\mathbf{C}_0$ содержит коэффициенты в выражении для линейной формы при нулевых переменных, а $\mathbf{C}_s$ – для остальных (базисных) переменных:

$$\mathbf{C}_0 = (0{,}6 \quad 0{,}3); \tag{3.29}$$

$$\mathbf{C}_s = (0{,}4 \quad 0{,}5 \quad 0{,}2 \quad 0{,}8). \tag{3.30}$$

Проверка всех получаемых допустимых планов (в том числе и исходного) на оптимальность производится с помощью так называемого *критериального вектора* **D**.

Критериальным называется вектор, обладающий следующим свойством: если хотя бы один из входящих в него элементов положителен, то соответствующий план неоптимален; наличие в составе критериального вектора только отрицательных или равных нулю элементов говорит об оптимальности плана.

Критериальный вектор рассчитывается по формуле

$$\mathbf{D} = \mathbf{C}_s\mathbf{R} - \mathbf{C}_0; \qquad (3.31)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}_s^{-1} \cdot \mathbf{A}_0,$$

где $\mathbf{A}_s^{-1}$ – обратная матрица[1] по отношению к матрице $\mathbf{A}_s^*$.

Имеется доказательство, что в случае оптимальности полученного плана все элементы критериального вектора становятся равными нулю или меньшими нуля (см. выше критерий δ).

Проверим наш исходный план с помощью критериального вектора. $\mathbf{A}_s^{-1}$ находится из равенства $\mathbf{A}_s\mathbf{A}_s^{-1} = 1$:

$$\mathbf{A}_s^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & \frac{3}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}_s^{-1}\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & \frac{3}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 2 \\ \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix};$$

[1] Матрица **B** называется обратной по отношению к квадратной матрице **A**, если **AB** = 1 (где 1 – единичная матрица). Матрица, обратная матрице **A**, обозначается $\mathbf{A}^{-1}$.

$$\mathbf{C}_s\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \frac{4}{10} & \frac{5}{10} & \frac{2}{10} & \frac{8}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 2 \\ \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{10} - \frac{3}{10} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{C}_s\mathbf{R} - \mathbf{C}_0 = \begin{pmatrix} \frac{19}{10} - \frac{3}{10} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{6}{10} - \frac{3}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{10} - \frac{3}{5} \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

Поскольку $\frac{13}{10} > 0$, исходный план неоптимален.

Переходим ко второму шагу.

Из выражения (3.32) находим наибольший коэффициент $\frac{13}{10}$, соответствующий переменной x_5, которая вводится в базис.

Затем описанным выше путем устанавливается переменная x_4, подлежащая исключению из базиса.

Значения других переменных рассчитываются по формуле

$$\mathbf{X}_s = \mathbf{B} - x_5\mathbf{R}_5, \quad (3.33)$$

где

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}_s^{-1} \cdot \mathbf{S};$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & \frac{3}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 10 \\ 76 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} \\ 5 \\ 62 \\ 7 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{X}_s = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} \\ 5 \\ 62 \\ 7 \end{pmatrix} - 0 = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} \\ 5 \\ 62 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы получили следующие значения переменных для второго, улучшенного плана:

$$x_1 = \frac{9}{4};$$
$$x_2 = 5;$$
$$x_3 = 62;$$
$$x_4 = 7;$$
$$x_5 = 0;$$
$$x_6 = 0.$$

Это уже знакомый нам первый допустимый план, которому соответствует точка А на графике рис. 3.1, и т.д.

Ниже приводится ряд задач, решаемых с помощью линейного программирования, которые иллюстрируют возможности данного метода и приемы решения.

Пример 3.2

Рассмотрим некую производственную ситуацию. Например, организация, занимающаяся механизацией трудоемких работ, располагает набором однородных технических средств в количестве 30 единиц, которые размещаются в трех базах: $А_1$, $А_2$, $А_3$. При этом базы $А_1$ и $А_2$ имеют по 11 единиц техники, а база $А_3$ – 8 единиц. Использование этой техники планируется на четырех объектах $Б_1$, $Б_2$, $Б_3$, $Б_4$. Причем объект $Б_1$ нуждается в 5 единицах, объекты $Б_2$ и $Б_3$ – в 9 единицах каждый, а объект $Б_4$ – в 7 единицах техники.

Эффективность эксплуатации технических средств во многом зависит от того, насколько интенсивно они используются, т.е. чем меньше простои, тем выше эффективность. В данном случае простой машин определяется главным образом тем, на каком объекте они работают. Например, машины базы $А_3$, занятые на объекте $Б_1$, простаивают в среднем 6 ч в неделю, а те же машины на объекте $Б_3$ бездействуют лишь 1 ч в неделю.

Общая картина использования техники с указанием ее наличия в базах и потребностей на объектах показана в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Простои машин (в часах за неделю)

Базы	Объекты			
	$Б_1$ 5	$Б_2$ 9	$Б_3$ 9	$Б_4$ 7
A_1 11	7	8	5	3
A_2 11	2	4	5	9
A_3 8	6	3	1	2

Решение

Необходимо разработать такой план распределения машин по объектам, при котором суммарное время простоя техники окажется наименьшим. Это будет так называемая *транспортная задача* математического программирования. Одним из наиболее распространенных методов решения подобных задач является метод потенциалов. Прежде всего составляем исходный план распределения машин по объектам.

В правые верхние углы клеток таблицы поместим цифры простоя машин, освободив тем самым нижнюю половину клеток для цифр, характеризующих количество распределяемых единиц техники.

Первоначально заполняется первая строка плана. Очевидно, что распределение целесообразно выполнить по тому направлению, где время простоя минимально, т.е. $A_1Б_4$. Здесь время простоя (обозначим его C_{14}) равно 3 ч. Количество машин на этом направлении устанавливается как минимальное из их общего количества, имеющегося на A_1 и потребного для $Б_4$, и равняется 7. Таким образом, достигается либо полный расход техники данной базы, либо полное насыщение данного объекта. В рассматриваемом случае полностью насыщается объект $Б_4$ (для памяти подчеркнем).

После указанной операции на базе A_1 остаются 4 единицы, которые записываем в скобках рядом с цифрой 11. Этот остаток целесообразно направить на объект $Б_3$, поскольку простои по направлению $A_1Б_3$ будут минимальными из оставшихся. Теперь все ресурсы базы A_1 оказываются исчерпанными (A_1 можно подчеркнуть), а на объекте $Б_3$ остается потребность в 5 единицах (эта цифра записывается рядом с 9 в скобках).

Поскольку все ресурсы базы A_1 израсходованы, переходим ко второй строке плана, где описание операций повторяется, и т.д.

Таблица 3.3

Первый план (исходный)

Базы	Объекты				
	$Б_1$ 5	$Б_2$ 9 (3)	$Б_3$ 9 (5)	$Б_4$ 7	u_{Ai}
A_1 11 (4)	5 < 7	7 < 8	5 4	3 7	0
A_2 11 (6)	2 5	4 6	2 < 5	0 < 9	–3
A_3 8 (3)	1 < 6	3 3	1 5	–1 < 2	–4
$u_{Бj}$	5	7	5	3	

В результате получаем первый, или исходный, план распределения машин по объектам (табл. 3.3).

Чтобы определить оптимальность полученного плана, время простоя, характеризующее эффективность решаемой задачи, будем рассматривать в качестве некоторой стоимости: чем время простоя меньше, тем меньше и стоимость работы.

Вводим понятие потенциала. Потенциалами являются некоторые числа u_{Ai} и $u_{Бj}$, приписываемые соответственно базам и объектам, сумма которых для клеток плана, содержащих цифры распределенных машин, равна стоимости результата времени простоя, т.е.

$$u_{Ai} + u_{Бj} = c_{ij}\ (x_{ij} > 0), \tag{3.34}$$

а для тех клеток, где распределения нет, эта сумма будет не более стоимости результата, т.е.

$$u_{Ai} + u_{Бj} \leq (c_{ij} x_{ij} \leq 0). \tag{3.35}$$

План, все клетки которого отвечают условиям (3.34), (3.35), является оптимальным.

Чтобы определить оптимальность указанного исходного плана, вначале рассчитаем и внесем в табл. 3.3 значения потенциалов баз и объектов.

Примем, что $u_{A1} = 0$, тогда

$$u_{Б3} = c_{13} - u_{A1} = 5 - 0 = 5;$$
$$u_{Б4} = c_{14} - u_{A1} = 3 - 0 = 3;$$
$$u_{A3} = c_{33} - u_{Б3} = 1 - 5 = -4;$$
$$u_{Б3} = c_{23} - u_{A3} = -3(-4) = 7;$$
$$u_{A2} = c_{22} - u_{Б2} = 4 - 7 = -3;$$
$$u_{Б1} = c_{21} - u_{A2} = 2 - (-3) = 5.$$

Проверим теперь, соблюдается ли условие потенциальности для свободных клеток. Просуммируем для каждой из них соответствующие потенциалы баз и объектов и сравним полученные значения с временем простоя, проставленным в правых верхних углах клеток.

Суммы потенциалов для свободных клеток называются псевдостоимостями и обозначаются C_{ij}. Их записывают в левых верхних углах клеток.

Из выражений (3.34) и (3.35) следует, что для оптимального варианта плана: $C_{ij} - C_{ij} \leq 0$. Как видно из табл. 3.3, условие (3.34) выполняется для всех свободных клеток. Следовательно, этот план оптимальный.

В случае, если условие оптимальности не соблюдено, план подлежит улучшению.

Пример 3.3

Допустим, что производственное предприятие располагает четырьмя бригадами рабочих-специалистов определенного профиля: условно A_1, A_2, A_3, A_4. Специалисты из этих бригад распределяются по пяти различным видам работ: условно $Б_1$, $Б_2$, $Б_3$, $Б_4$, $Б_5$. От того, как будут распределены по этим видам рабочие, зависит в первую очередь качество продукции.

При составлении конкретного плана распределения рабочих-специалистов целесообразно применять математическое программирование.

Прежде всего составляется таблица исходного плана (табл. 3.4), подобная рассмотренной выше. В качестве стоимостей и псевдостоимостей в данном случае выступают стоимости бракованной продукции, получаемой при данном распределении рабочих по видам работ.

Здесь в трех клетках – $А_1Б_5$, $А_2Б_1$ и $А_4Б_5$ – псевдостоимости оказываются большими, чем соответствующие стоимости (эти неравенства подчеркнуты). Таким образом, условие оптимальности не соблюдается и, следовательно, план требует улучшения. Для этого необходимо ввести распределение рабочих в ту из клеток, где имеются наибольшие нарушения условий оптимальности, т.е. где разность между псевдостоимостью и стоимостью наибольшая (она подчеркнута двойной чертой в клетке $А_2Б_1$).

Таблица 3.4

Первый план (исходный)

Бригады	Виды работ					
	$Б_1$ 24 (12)	$Б_2$ 15 (13,4)	$Б_3$ 10	$Б_4$ 20	$Б_5$ 7	u_{Ai}
$А_1$ 22 (2)	11 < 12	8 2	7 < 10	4 20	10 > 9	0
$А_2$ 19 (9)	6 < 3 h_1	3 $9 - h_1$	2 10	–1 < 6	5 < 10	–5
$А_3$ 29 (12)	3 12	0 < 7	–1 < 10	–4 < 3	2 7	–8
$А_4$ 16 (12)	8 $12 - h_1$	5 $4 + h_1$	4 = 4	1 < 3	7 > 5	–3
$u_{Бj}$	11	8	7	4	10	

Чтобы при заполнении $А_2Б_1$ не был нарушен общий баланс распределения, необходимо перераспределение специалистов выполнить так, чтобы сумма ресурсов рабочих по всем горизонталям и вертикалям сохранялась. Достигается это тем, что рабочие перераспределяются лишь в пределах определенного контура, начало и конец которого находятся в полученной свободной клетке $А_2Б_1$ (отмечен штриховой линией). Изменение направления контура следует производить в тех клетках, где есть распределение. Причем необходимо стремиться к тому, чтобы поворотные клетки, лежащие на одной горизонтали и вертикали со свободной клеткой, содержали работы наибольшей стоимости (с наибольшим браком). Это выгодно, так как количество рабочих в указанных клетках будет уменьшаться на h человек для компенсации нового распределения в клетке $А_2Б_1$. Тем самым брак будет уменьшаться.

Для соблюдения общего баланса добавляют h рабочих в клетку $А_4Б_2$. В контуре происходит чередование знаков дополнительного распределения h в поворотных клетках: в клетке $А_2В_1$ – плюс, в клетке $А_2Б_А$ – минус и т.д. Величина дополнительного количества рабочих h должна избираться таким образом, чтобы ни одно из распределений не становилось отрицательным. В данном случае $h_1 = 9$.

Таблица 3.5

Второй план (улучшенный)

Бригады	Виды работ					
	$Б_1$ 24	$Б_2$ 15	$Б_3$ 10	$Б_4$ 20	$Б_5$ 7	u_{Ai}
$А_1$ 22	11 < 12	8 2	10 = 10	4 20	10 > 9	0
$А_2$ 19	3 9 + h_2	0 < 3	2 10 – h_2	–4 < 6	2 < 10	–8
$А_3$ 19	3 12	0 < 7	2 < 10	–4 < 3	2 7	–8
$А_4$ 16	8 3 – h_2	5 13	7 > 4 h_2	1 < 3	7 > 5	–3
$u_{Бj}$	11	8	10	4	10	

После распределения рабочих в контуре получим второй план, который вследствие более рационального распределения специалистов будет лучше исходного (табл. 3.4).

Общая стоимость брака по первому плану (y) составляла:

$$y_1 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij} = 8\cdot 2 + 4\cdot 20 + 3\cdot 9 + 2\cdot 10 + 3\cdot 12 +$$

$$+ 2\cdot 7 + 8\cdot 12 + 5\cdot 4 = 309.$$

После улучшения плана стоимость брака Δy уменьшилась на следующую величину:

$$\Delta y = C_{21}h_1 - C_{22}h_1 + C_{42}h_1 - C_{41}h_1 = h_1 \cdot (C_{21} - C_{22} + C_{42} - C_{41}) =$$
$$= (3 - 3 + 5 - 8)\cdot 9 = 27.$$

Общая стоимость брака по второму плану (y_2) будет:

$$y_2 = y_1 - \Delta y = 309 - 27 = 282.$$

При проверке второго плана на оптимальность устанавливаем, что условие оптимальности не соблюдено в клетках $А_1Б_5$ и $А_4Б_3$, причем последняя из них имеет наибольшую разность между псевдостоимостью и стоимостью. Строим контур относительно указанной клетки (см. табл. 3.5). Величина дополнительного количества рабочих $h_2 = 3$.

После перераспределения рабочих получим третий план (табл. 3.5), который экономичнее второго на величину Δy:

$$\Delta y = (C_{43} - C_{41} + C_{21} - C_{23}) \cdot h_2 = (4 - 8 + 3 - 2) \cdot 3 = -9.$$

Таблица 3.6

Третий план (оптимальный)

Бригады	Виды работ					
	Б1 24	Б2 15	Б3 10	Б4 20	Б5 7	u_{Ai}
А1 22	8 < 12	8 2	7 < 10	4 20	7 < 9	0
А2 19	3 12	3 = 3	2 7	–1 < 6	2 < 10	–5
А3 19	3 12	3 < 7	2 < 10	–1 < 3	2 = 2 7	–5
А4 16	5 < 8	5 13	4 3	1 < 3	4 < 5	–3
$u_{Бj}$	8	8	7	4	7	

Стоимость брака по третьему плану, таким образом, равна:

$$y_3 = y_2 - \Delta y = 282 - 9 = 273.$$

Проверка условия оптимальности показывает, что третий план является оптимальным.

Заметим, что оптимизация плана распределения рабочих-специалистов по видам работ привела к сокращению брака (по его стоимости) на 12% $\left(\frac{309 - 273}{309} \cdot 100\right)$. И это улучшение качества достигнуто без ввода каких-либо дополнительных ресурсов, исключительно за счет составления обоснованного плана.

Пример 3.4

Имеется m (i = 1, 2, ..., m) инвестиционных возможностей (вариантов проектов), которые можно реализовать на n (j =1, 2, ..., n) объектах.

Эффективность реализации каждой инвестиции на каждом из объектов (P_i) задана табл. 3.7.

Таблица 3.7

Эффективности реализации инвестиционных проектов

Инвестиционные проекты (i)	Объекты (j)				
	I	II	III	IV	V
1	0,12	0,02	0,50	0,43	0,15
2	0,71	0,18	0,81	0,05	0,26
3	0,84	0,76	0,26	0,37	0,52
4	0,22	0,45	0,83	0,81	0,65
5	0,49	0,02	0,50	0,25	0,27

Целевая функция, подлежащая максимизации (y), будет:

$$y = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} P_{ij} x_{ij}, \qquad (3.36)$$

где x_{ij} – искомые распределения инвестиций по объектам.

Таким образом, по смыслу величина y есть ожидаемый результат от осуществления всех инвестиционных проектов.

Ограничения в данном случае будут:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \ \ (i = 1, 2, ..., m), \qquad (3.37)$$

означающие, что должны быть реализованы все проекты

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \ \ (j = 1, 2, ..., n), \qquad (3.38)$$

и означающие, что на каждом объекте может быть реализован лишь один проект.

Кроме того, очевидно, что

$$x_{ij} \geq 0. \qquad (3.39)$$

Необходимо распределить проекты по объектам таким образом, чтобы суммарная эффективность от реализации всех проектов была максимальной.

Решение

Оптимизируемая функция, а также ограничивающие ее условия соответствуют данным, приведенным выше, при постановке транспортной задачи. Это дает возможность применить метод потенциалов (несколько его видоизменив).

По аналогии с транспортной задачей эффективности реализации играют роль стоимости перевозок; каждому проекту соответствует как бы единичный запас груза, каждый объект нуждается в единице груза.

Исходя из сказанного, представим условие примера 3.4 в виде табл. 3.8.

Вначале составим исходный план, заполняя в первую очередь те клетки, где эффективность реализации выше. Заполнение начинаем с первой строки. Схематическое изображение полученного исходного плана дано на рис. 3.2. Для первого плана математическое ожидание стоимости равно:

$$y_1 = 0{,}50 + 0{,}71 + 0{,}76 + 0{,}81 + 0{,}27 = 3{,}05.$$

Таблица 3.8

Условие примера 3.4

Инвестиционные проекты	Объекты					
	I $б_1 = 1$	II $б_2 = 1$	III $б_3 = 1$	IV $б_4 = 1$	V $б_5 = 1$	a_i
1 $a_1 = 1$	0,12	0,02	0,50 1	0,43	0,15	1
2 $a_2 = 1$	0,71 1	0,18	0,81	0,05	0,26	1
3 $a_3 = 1$	0,84	0,76 1	0,26	0,37	0,52	1
4 $a_4 = 1$	0,22	0,45	0,83	0,81 1	0,65	1
5 $a_5 = 1$	0,49	0,02	0,50	0,26	0,27 1	1
$б_j$	1	1	1	1	1	1

Чтобы улучшить исходный план методом потенциалов, прибегаем к следующему искусственному приему.

Внесем дополнительные "перевозки", выраженные в величинах ε, в каждую строку плана, одновременно изменив для сбалансирования плана единицы перевозок, стоящие в соответствующих вертикалях и горизонталях.

Для того чтобы такие действия не вызвали искажения плана, величина ε считается сколько угодно малой, и поэтому для плана добавление или исключение ее оказывается несущественным.

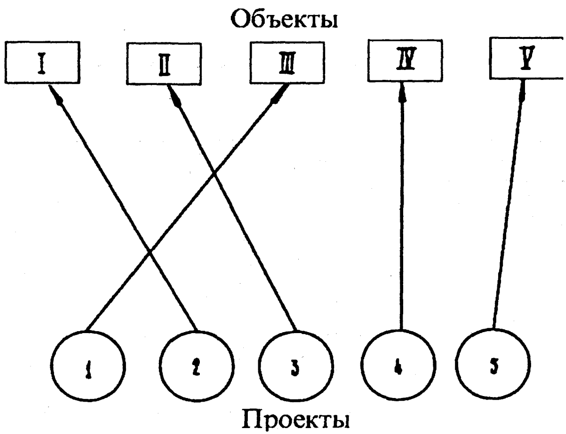

Рис. 3.2

Перепишем исходный план с учетом вышеизложенных изменений (табл. 3.9).

Проверим первый план на оптимальность аналогично тому, как это делалось в предыдущих задачах.

Здесь условие оптимальности не соблюдается в тех клетках, где псевдостоимости меньше, чем стоимости (в клетках 1–II, 1–IV, 1–V, 2–IV, 2–V, 3–V).

Наибольшая разность в клетке 1–IV, в которую нужно внести дополнительную "перевозку" h_1. Относительно указанной клетки строим контур. Величина $h_1 = \varepsilon$.

После перераспределения груза в контуре получим второй план, улучшенный по сравнению с исходным (табл. 3.10).

Проверим полученный план на оптимальность. Обнаружив, что он неоптимален, произведем его улучшение путем построения контура относительно свободной клетки 2–V.

При этом $h_2 = \varepsilon$.

Перейдем к третьему плану (табл. 3.11).

Дальнейшее улучшение плана выполняется аналогичным путем. Улучшенные планы сведены в таблицы. Четвертый – в табл. 3.12; пятый – в табл. 3.13; шестой – в табл. 3.14.

Таблица 3.9

Первый план (исходный)

Инвестиционные проекты	Объекты						
	I	II	III	IV	V	a_i	U_{Ai}
1	0,12 $\varepsilon - h_1$	–0,41 < 0,02	0,50 1	–0,80 < 0,43 h_1	–0,96 < 0,15	$1 - \varepsilon$	0
2	0,71 $1 - \varepsilon + h_1$	0,18 $2\varepsilon - h_1$	1,09 > 0,81	–0,21 < 0,05	–0,37 < 0,26	$1 + \varepsilon$	0,59
3	1,29 > 0,84	0,76 $1 - 2\varepsilon + h_1$	1,67 > 0,26	0,37 $3\varepsilon - h_1$	0,21 < 0,52	$1 + \varepsilon$	1,17
4	1,73 > 0,22	1,20 > 0,45	2,11 > 0,83	0,81 $1 - 3\varepsilon$	0,65 4ε	$1 + \varepsilon$	1,61
5	1,35 > 0,49	0,82 > 0,02	1,73 > 0,50	0,43 > 0,26	0,27 $1 + \varepsilon$	$1 + \varepsilon$	1,23
$б_j$	1	1	1	1	$1 + 5\varepsilon$	$5 + 5\varepsilon$	
$U_{Бj}$	0,12	–0,41	0,50	–0,80	–0,96		

Таблица 3.10

Второй план (улучшенный)

Инвестиционные проекты	Объекты						
	I	II	III	IV	V	a_i	U_{Ai}
1	1,35 > 0,12	0,82 > 0,02	0,50 1	0,43 ε	0,27 > 0,15	$1 + \varepsilon$	0
2	0,71 1	0,18 $\varepsilon - h_2$	–0,14 < 0,81	–0,21 < 0,05	–0,37 < 0,26 h_2	$1 + \varepsilon$	–0,64
3	1,29 > 0,84	0,76 $1 - \varepsilon + h_2$	0,44 > 0,26	0,37 $2\varepsilon - h_2$	0,21 < 0,52	$1 + \varepsilon$	–0,06
4	1,73 > 0,22	1,20 > 0,45	0,88 > 0,83	0,81 $1 - 3\varepsilon + h_2$	0,65 $4\varepsilon - h_2$	$1 + \varepsilon$	0,38
5	1,35 > 0,49	0,82 > 0,02	0,50 = 0,50	0,43 > 0,26	0,27 $1 + \varepsilon$	$1 + \varepsilon$	0
$б_j$	1	1	1	1	$1 + 5\varepsilon$	$5 + 5\varepsilon$	
$U_{Бj}$	1,35	0,82	0,50	0,43	0,27		

Таблица 3.11

Третий план (улучшенный)

Инвестиционные проекты	Объекты						
	I	II	III	IV	V	a_i	U_{Ai}
1	0,72 > 0,12	0,82 > 0,02	0,50 $1 - h_3$	0,43 $\varepsilon + h_3$	0,27 > 0,15	$1 + \varepsilon$	0
2	0,71 1	0,81 > 0,18	<u>0,49 < 0,81</u> h_3	0,42 > 0,05	0,26 $\varepsilon - h_3$	$1 + \varepsilon$	–0,01
3	<u>0,66 < 0,84</u>	0,76 1	0,44 > 0,26	0,37 ε	<u>0,21 < 0,52</u>	$1 + \varepsilon$	–0,06
4	1,10 > 0,22	1,20 > 0,45	0,88 > 0,83	0,81 $1 - 2\varepsilon - h_3$	0,65 $3\varepsilon + h_3$	$1 + \varepsilon$	0,38
5	0,72 > 0,49	0,82 > 0,02	0,50 = 0,50	0,43 > 0,26	0,27 $1 + \varepsilon$	$1 + \varepsilon$	0
$б_j$	1	1	1	1	$1 + 5\varepsilon$	$5 + 5\varepsilon$	
$U_{Бj}$	0,72	0,82	0,50	0,43	0,27		

Таблица 3.12

Четвертый план (улучшенный)

Инвестиционные проекты	Объекты						
	I	II	III	IV	V	a_i	U_{Ai}
1	0,40 > 0,12	0,82 > 0,02	0,50 $1 - \varepsilon - h_4$	0,43 $2\varepsilon + h_4$	0,27 > 0,15	$1 + \varepsilon$	0
2	0,71 $1 - h_4$	1,13 > 0,18	0,81 $\varepsilon + h_4$	0,74 > 0,05	0,58 > 0,26	$1 + \varepsilon$	0,31
3	<u>0,34 < 0,84</u> h_4	0,76 1	0,44 > 0,26	0,37 $\varepsilon - h_4$	<u>0,21 < 0,52</u>	$1 + \varepsilon$	–0,06
4	0,78 > 0,22	1,20 > 0,45	0,88 > 0,83	0,81 $1 - 3\varepsilon$	0,65 4ε	$1 + \varepsilon$	0,38
5	<u>0,40 < 0,49</u>	0,82 > 0,02	0,50 = 0,50	0,43 > 0,26	0,27 $1 + \varepsilon$	$1 + \varepsilon$	0
$б_j$	1	1	1	1	$1 + 5\varepsilon$	$5 + 5\varepsilon$	
$U_{Бj}$	0,40	0,82	0,50	0,43	0,27		

Таблица 3.13

Пятый план (улучшенный)

Инвестиционные проекты	Объекты						
	I	II	III	IV	V	a_i	U_{Ai}
1	0,40 > 0,12	0,32 > 0,02	0,50 1 – 2ε	0,43 3ε	0,27 > 0,15	1 + ε	0
2	0,71 1 – ε	0,63 > 0,18	0,81 2ε	0,74 > 0,05	0,58 > 0,26	1 + ε	0,31
3	0,84 ε	0,76 1	0,94 > 0,26	0,87 > 0,37	0,71 > 0,52	1 + ε	0,44
4	0,78 > 0,22	0,70 > 0,45	0,88 > 0,83	0,81 1 – 3ε	0,65 4ε	1 + ε	0,38
5	0,40 < 0,49 h_5	0,32 > 0,02	0,50 = 0,50	0,43 > 0,26	0,27 1 + ε	1 + ε	0
$б_j$	1	1	1	1	1 + 5ε	5 + 5ε	
$U_{Бj}$	0,40	0,32	0,50	0,43	0,27		

Таблица 3.14

Шестой план (оптимальный)

Инвестиционные проекты	Объекты						
	I	II	III	IV	V	a_i	U_{Ai}
1	0,40 > 0,12	0,32 > 0,02	0,50 ε	0,43 1	0,18 > 0,15	1 + ε	0
2	0,71 2ε	0,63 > 0,18	0,81 1 – ε	0,74 > 0,05	0,49 > 0,26	1 + ε	0,31
3	0,84 ε	0,76 1	0,94 > 0,26	0,87 > 0,37	0,62 > 0,52	1 + ε	0,44
4	0,87 > 0,22	0,79 > 0,45	0,97 > 0,83	0,90 > 0,81	0,65 1 + ε	1 + ε	0,47
5	0,49 1 – 3ε	0,41 > 0,02	0,59 > 0,50	0,52 > 0,26	0,27 4ε	1 + ε	0,09
$б_j$	1	1	1	1	1 + 5ε	5 + 5ε	
$U_{Бj}$	0,40	0,32	0,50	0,43	0,18		

Последний, шестой план является оптимальным, ибо все разности между псевдостоимостями и стоимостями положительные.

Перепишем оптимальный план, исключив из него сколь угодно малые величины ε (табл. 3.15).

Таблица 3.15

Оптимальный план распределения проектов

Инвестиционные проекты	Объекты				
	I	II	III	IV	V
1				1	
2			1		
3		1			
4					1
5	1				

Графически оптимальный план распределения проектов показан на рис. 3.3.

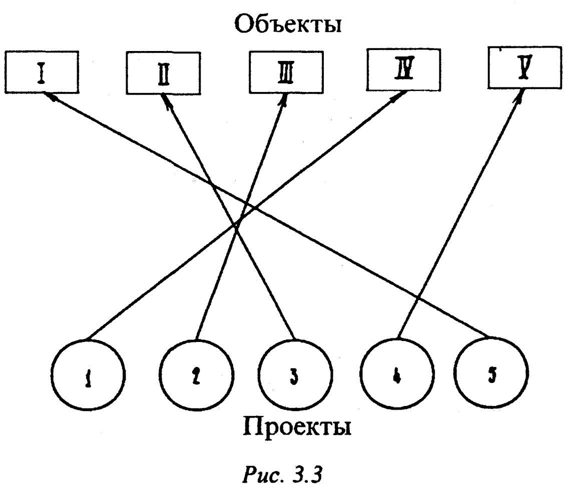

Рис. 3.3

Нелинейное программирование (планирование)

Нелинейное программирование (планирование) – математические методы отыскания максимума или минимума функции при наличии ограничений в виде неравенств или уравнений.

Максимизируемая (минимизируемая) функция представляет собой принятый критерий эффективности решения задачи, соответствующий поставленной цели. Он носит название целевой функции.

Ограничения характеризуют имеющиеся возможности решения задачи.

Целевая функция или хотя бы одно из ограничений *нелинейны* (т.е. на графиках изображаются непрямыми – кривыми – линиями).

Существо решения задач нелинейного программирования заключается в том, чтобы найти условия, обращающие целевую функцию в минимум или максимум.

Решение, удовлетворяющее условиям задачи и соответствующее намеченной цели, называется *оптимальным планом*.

Нелинейное программирование служит для выбора наилучшего плана распределения ограниченных ресурсов в целях решения поставленной задачи.

В общем виде постановка задачи нелинейного программирования сводится к следующему.

Условия задачи представляются с помощью системы нелинейных уравнений или неравенств, выражающих ограничения, налагаемые на использование имеющихся ресурсов:

$$\left.\begin{array}{l} Z_1(x_1, x_2, ..., x_n) \ge 0; \\ Z_2(x_1, x_2, ..., x_n) \ge 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Z_m(x_1, x_2, ..., x_n) \ge 0 \\ \text{при } x_i \ge 0, \end{array}\right\} \qquad (3.40)$$

где Z_1, Z_2, ..., Z_m – соответствующие функции, характеризующие условие решения поставленной задачи (ограничения); x_i – искомые величины, содержащие решение задачи.

Целевая функция задается в виде:

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n). \qquad (3.41)$$

Причем по крайней мере одна из функций y, Z_1, Z_2, ..., Z_m – нелинейная.

Методами нелинейного программирования решаются задачи распределения неоднородных ресурсов.

Пусть имеется m разнородных ресурсов, которые предполагается реализовать для бизнеса в n регионах страны.

Известны оценочные возможности (вероятности) начать бизнес в j-м регионе (P_j), а также эффективности использования i-го ресурса в n-м регионе (ω_{ij}).

Распределение ресурсов по регионам характеризуется так называемым параметром управления (h_{ij}):

$$h_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ если i - й ресурс не направляется в j - й регион,} \\ 1, \text{ если i - й ресурс направляется в j - й регион.} \end{cases}$$

Необходимо распределить ресурсы по регионам таким образом (выбирать такие значения h_{ij}), чтобы величина полной вероятности достижения цели $P_ц$ была максимальной:

$$P_ц = \sum_{j=1}^{n} P_j \left[1 - \prod_{i=1}^{m} (1 - h_{ij}\omega_{ij}) \right] = \max. \qquad (3.42)$$

Должно выполняться также ограничение

$$\sum_{j=1}^{n} h_{ij} = 1, \; i = 1, 2, ..., m. \qquad (3.43)$$

Это ограничение означает, что каждый из m ресурсов обязательно должен назначаться в какой-либо из регионов.

Ниже приводится ряд типовых задач, решаемых с помощью нелинейного программирования, которые иллюстрируют его возможности и приемы решения.

Пример 3.5

Собственник располагает четырьмя видами разнородных ресурсов, которые можно реализовать для бизнеса в четырех регионах страны (m = n = 4). Оценочные возможности (вероятности) начать бизнес в j-м регионе (P_j) заданы табл. 3.16.

Таблица 3.16

Вероятности начать бизнес в регионе

Регионы	1	2	3	4
Вероятности (P_j)	0,2	0,4	0,3	0,1

Эффективности при использовании i-го ресурса в j-м регионе (ω_{ij}) заданы табл. 3.17.

Таблица 3.17

Эффективность использования ресурсов

Номер ресурса	Номер региона			
	1	2	3	4
1	0,81	0,65	0,32	0,47
2	0,66	0,51	0,19	0,75
3	0,32	0,17	0,39	0,15
4	0,43	0,46	0,58	0,60

Необходимо распределить ресурсы по регионам таким образом, чтобы полная вероятность достижения цели деятельности (успеха) оказалась максимальной. При этом каждый ресурс должен быть обязательно распределен в каком-либо регионе.

Решение

Рассмотрим наиболее простой случай, когда в каждый из районов поиска может быть направлено не более одной поисковой единицы. Задача нелинейного программирования при этом может быть сведена к одному из частных случаев задачи линейного программирования.

При этом

$$\prod_{i=1}^{m}(1-h_{ij}\omega_{ij}) = 1-\sum_{i=1}^{m}h_{ij}\omega_{ij}, \tag{3.44}$$

$$P_{об} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}h_{ij}P_i\omega_{ij}. \tag{3.45}$$

В нашем случае m = n. Решение при этом сводится к составлению матрицы $\mathbf{A} = \| P_i\omega_{ij} \|$ и выбору из каждой ее строки и каждого столбца по одному элементу таким образом, чтобы сумма их оказалась наибольшей. Это один из частных случаев задачи линейного программирования.

Вычислительную процедуру удобно выполнить с помощью следующего метода.

Вначале рассчитываются элементы матрицы

$$\mathbf{A} = \| P_i\omega_{ij} \dots 10^3 \|.$$

Регионы (столбцы)

$$\mathbf{A} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} & \\ \begin{Vmatrix} 162 & 260 & 96 & 47 \\ 132 & 204 & 57 & 75 \\ 64 & 68 & 117 & 15 \\ 86 & 184 & 174 & 60 \end{Vmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{array} \quad \text{Ресурсы (строки)}$$

Затем матрица **A** подвергается эквивалентному преобразованию, для чего:

– отыскивается в каждом ее столбце максимальный элемент и вычитаются из него все элементы этого столбца;

– в каждой строке полученной таким образом матрицы отыскивается минимальный элемент и вычитается из всех элементов этой строки.

Полученная матрица обозначается $\mathbf{A}^{(0)}$. В ней в каждой строке и каждом столбце есть хотя бы один нуль.

В первом столбце матрицы $\mathbf{A}^{(0)}$ выбирается любой нуль и отмечается звездочкой. Затем просматривается второй столбец и отмечается в нем звездочкой нуль лишь в том случае, если в этой же строке нуля со звездочкой нет. И так далее по всем столбцам. Полученные нули со звездочками называются независимыми.

$$\mathbf{A}^{(0)} = \begin{Vmatrix} 0^* & 0 & 78 & 28 \\ 30 & 56 & 117 & 0^* \\ 41 & 135 & 0^* & 3 \\ 76 & 76 & 0 & 15 \end{Vmatrix}.$$

Далее решение выполняется методом последовательных приближений (итераций). Каждый шаг итерации увеличивает число независимых нулей на единицу. Решение оканчивается тогда, когда число независимых нулей становится равным n. Поскольку в нашей матрице $\mathbf{A}^{(0)}$ три независимых нуля, достаточно одной итерации (так как $n = 4$).

Итерация выполняется в следующей последовательности.

1. В матрице $A^{(0)}$ (в общем случае в матрице, полученной в результате предыдущей итерации) выделяются знаком “+” столбцы, содержащие независимые нули. Элементы матрицы, лежащие в выделенных столбцах, называются выделенными (см. ниже матрицу а).

2. Смотрим, есть ли среди невыделенных элементов нули. Если есть, переходим к п. 3. Если нет – к п. 5.

3. Над любым невыделенным нулем ставится знак “′”. Смотрим, есть ли 0^* в строке, содержащей $0'$. Если есть, выделяем знаком “+” эту строку (она называется выделенной) и снимаем (обводим кружком) знак выделения над столбцом, содержащим 0^* (см. ниже матрицу а). Затем возвращаемся к п. 2. Если нет – переходим к п. 4.

4. Начиная с $0'$, в строке которого на предыдущем шаге не был обнаружен 0^*, строим цепочку с чередованием 0^* и $0'$ до тех пор, пока это возможно. Переход от $0'$ к 0^* совершается по столбцу, а от 0^* к $0'$ – по строке (см. ниже матрицу в).

Над нечетными элементами цепочки ставятся звездочки, а над четными они снимаются. При этом количество независимых нулей возрастает на один. Все плюсы и штрихи уничтожаются.

Если число 0^* оказывается меньше n, возвращаемся к п. 1, если равно n – переходим к п. 6.

5. Выбирается минимальный элемент из всех невыделенных (в матрице а он подчеркнут). Этот элемент вычитается из всех невыделенных и прибавляется к элементам, находящимся на пересечении выделенных строк и столбцов (см. матрицу а и б). Далее переходим к п. 2.

6. Устанавливается оптимальное распределение поисковых единиц по районам действий. Оно соответствует тем местам матрицы г, где стоят независимые нули.

Вычисляется максимальное значение P, равное сумме a_{ij}, стоящих на местах независимых нулей.

Последовательное преобразование матрицы $A^{(0)}$ применительно к данному примеру (матрицы а, б, в, г) показано ниже.

$$a \qquad \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \oplus & \quad & + & + \end{array} & \\ \left\| \begin{array}{cccc} 0^* & 0' & 78 & 28 \\ \underline{30} & 56 & 117 & 0^* \\ 41 & 135 & 0^* & 3 \\ 76 & 76 & 0 & 15 \end{array} \right\| & \begin{array}{c} + \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$
б \qquad \begin{array}{l}
\begin{array}{cccc} & & + & \oplus \end{array} \\
\left\Vert \begin{array}{cccc}
0^* & 0' & 108 & 58 \\
0' & 26 & 117 & 0^* \\
11 & 105 & 0^* & \underline{3} \\
46 & 46 & 0 & 15
\end{array} \right\Vert
\begin{array}{c} + \\ + \\ \\ \end{array}
\end{array}
$$

$$
в \qquad \begin{array}{l}
\begin{array}{cccc} & & \oplus & \end{array} \\
\left\Vert \begin{array}{cccc}
0^* & 0' & 111 & 58 \\
0' & 26 & 120 & 0^* \\
8 & 102 & 0^* & 0' \\
43 & 43 & 0' & 12
\end{array} \right\Vert
\begin{array}{c} + \\ + \\ + \\ \end{array}
\end{array}
$$

Регионы

$$
г \qquad \begin{array}{l}
\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\left\Vert \begin{array}{cccc}
0 & 0^* & 111 & 58 \\
0^* & 26 & 120 & 0 \\
8 & 102 & 0 & 0^* \\
43 & 43 & 0^* & 12
\end{array} \right\Vert
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
\end{array}
\quad \text{Ресурсы}
$$

Положение независимых нулей в матрице г дает следующее оптимальное распределение ресурсов по регионам (табл. 3.18).

Таблица 3.18

Оптимальное распределение ресурсов по регионам

Номер ресурса	Номер региона			
	1	2	3	4
1	–	1	–	–
2	1	–	–	–
3	–	–	–	1
4	–	–	1	–

Соответствующая этому распределению максимальная вероятность достижения цели равна сумме соответствующих элементов матрицы **A**.

$$P = 0{,}132 + 0{,}260 + 0{,}174 + 0{,}015 = 0{,}581.$$

Рассмотренный пример относится к случаю, когда $m = n$. Если $m < n$, необходимо ввести $n - m$ фиктивных поисковых единиц с нулевыми возможностями ($\omega_{ij} = 0$ для $i > m$), сведя тем самым задачу к рассмотренному случаю.

П р и м е р 3.6

Имеется две группы разнородных ресурсов ($m = 2$), которые можно вложить в три инвестиционных проекта ($n = 3$). В первой группе шесть единиц ресурсов ($N_1 = 6$), во второй – десять ($N_2 = 10$).

Степени важности проектов заданы табл. 3.19.

Таблица 3.19

Степени важности проектов

Проекты	1	2	3
Степени важности (P_j)	0,3	0,2	0,5

Эффективности вложений ресурсов различного рода (ω_{ij}) заданы табл. 3.20.

Таблица 3.20

Эффективности вложений ресурсов различного рода в регионы

Номер группы ресурсов	Номер проекта		
	1	2	3
1	0,40	0,10	0,50
2	0,20	0,40	0.20

Распределение ресурсов по проектам характеризуется матрицей $A = \| x_{ij} \|$, где x_{ij} – количество ресурсов i-го типа, назначаемых на j-й проект.

Необходимо распределить ресурсы по проектам таким образом, чтобы суммарная эффективность была максимальной:

$$M = \sum_{j=1}^{n} P_i \left[1 - \prod_{i=1}^{m} (1 - \omega_{ij})^{x_{ij}} \right] = \max. \tag{3.46}$$

Должны выполняться такие ограничения:

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = N_i; \ i = 1, 2, ..., m; \\ & x_{ij} \geq 0, \ i = 1, 2, ..., m; \ j = 1, 2, ..., n. \end{aligned} \right\} \tag{3.47}$$

Решение

– В области изменения максимизируемой функции определяется исходное допустимое решение, удовлетворяющее ограничительным условиям задачи;

– с помощью специального критерия проверяется, достаточно ли близко полученное решение к оптимальному;

– если полученное отклонение больше требуемого, то путем построения так называемого возможного направления и определения в этом направлении конечного шага получают новое допустимое решение, которое увеличивает значение максимизируемой функции;

– процесс расчетов носит характер последовательных приближений и продолжается до тех пор, пока на некотором шаге итерации не будет получено решение, близкое к оптимальному с требуемой точностью приближения.

Последовательность расчетов

1. Определяется исходное допустимое решение

$$\mathbf{A}^{(0)} = \| x_{ij}^{(0)} \|, \tag{3.48}$$

где $\mathbf{A}^{(0)}$ – матрица, характеризующая исходное распределение ресурсов по проектам.

В качестве исходного (начального) распределения может быть взято любое (в том числе и произвольное) распределение (матрица $\mathbf{A}^{(0)}$), не противоречащее ограничительным условиям задачи. Чем это начальное распределение окажется ближе к оптимальному, тем меньше необходимое число итераций.

Мы можем здесь воспользоваться приближенным решением этой же задачи, полученным с помощью метода динамического программирования (см. ниже в данном параграфе).

Номера проектов (столбцы)

$$\begin{array}{rcl} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} & \\ \mathbf{A}^{(0)} = & \left\| \begin{array}{ccc} 3 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{array} \right\| & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \end{array} \quad \text{Номера групп ресурсов (строки)} \tag{3.49}$$

Далее осуществляется итеративный процесс; в результате выполнения k итераций получается k-е приближение к оптимальному распределению:

$$\mathbf{A}^{(k)} = \left\| x_{ij}^{(k)} \right\|. \tag{3.50}$$

2. Определяется компонента матрицы возможного направления:

$$\mathbf{S}^{(k)} = \left\| \mathbf{S}_{ij}^{(k)} \right\|;$$
$$\mathbf{S}_{ij}^{(k)} = \tilde{x}_{ij}^{(k)} - x_{ij}^{(k)}. \tag{3.51}$$

Величины $\tilde{x}_{ij}^{(k)}$ находятся с помощью матрицы $y_{ij}^{(k)}$:

$$y_{ij}^{(k)} = P_j a_{ij} \exp\left(-\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_{ij}^{(k)} \right), \tag{3.52}$$

где
$$a_{ij} = -\ln(1 - \omega_{ij}). \tag{3.53}$$

В каждой строке матрицы $y_{ij}^{(k)}$ отыскивается максимальный элемент. Положение максимальных элементов и определяет искомые значения $\tilde{x}_{ij}^{(k)}$, равные N_i ($i = 1, 2, ..., m$). Остальные $x_{ij}^{(k)}$ принимаются равными нулю.

3. Оценивается близость полученного решения к оптимальному. Для этого рассчитывается величина отклонения решения на данном шаге от оптимального решения $\Delta^{(k)}$:

$$\Delta^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}_j^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} y_{ij}^{(k)} \mathbf{S}_{ij}^{(k)} \right). \tag{3.54}$$

Величина $\Delta^{(k)}$ сравнивается с величиной ε – требуемым отклонением полученного на данном шаге математического ожидания (суммарной эффективности) от математического ожидания, соответствующего оптимальному распределению.

Если $\Delta^{(k)} \le \varepsilon$, то решение практически оптимально, если $\Delta^{(k)} > \varepsilon$ – необходимо перейти к п. 4.

4. Находится длина λ_k шага, который необходимо сделать вдоль возможного направления, для того чтобы приблизиться к оптимальному решению. Величина λ_k находится из уравнения

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}_j^{(k)} \exp\left(-\lambda_k \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \mathbf{S}_{ij}^{(k)} \right) = 0. \tag{3.55}$$

5. Находится новое допустимое решение $\mathbf{A}^{(k)} = \| x_{ij}^{(k+1)} \|$, где

$$x_{ij}^{(k+1)} = x_{ij}^{(k)} + \lambda_k \mathbf{S}_{ij}^{(k)}. \tag{3.56}$$

Далее вычисления повторяются, начиная с п. 2.

Результаты расчетов сведены в табл. 3.21.

Таблица 3.21

Результаты расчетов примера 3.6

Номер итерации, k	План распределения, $x_{ij}^{(k)}$						Отклонение от оптимального решения, $\Delta^{(k)}$	Шаг, λ_k	Суммарная эффективность
	$x_{11}^{(k)}$	$x_{12}^{(k)}$	$x_{13}^{(k)}$	$x_{21}^{(k)}$	$x_{22}^{(k)}$	$x_{23}^{(k)}$			
0	3	0	3	3	5	2	0,042	0,043	0,9110
1	2,87	0	3,13	2,87	4,79	2,34	0,019	0,053	0,9123
2	2,72	0	3,28	2,72	5,07	2,21	0,015	0,089	0,9129
3	2,48	0	3,52	3,37	4,61	2,02	0,014	0,032	0,9135
4	2,59	0	3,41	3,26	4,79	1,95	0,009	0,020	0,9136

Решение на четвертом шаге, округленное до целых единиц (табл. 3.22).

Таблица 3.22

Оптимальное распределение ресурсов

Проекты	Ресурсы	
	1-я группа	2-я группа
1	3	3
2	0	5
3	3	2

Количество шагов итерации определено требуемой точностью расчета математического ожидания числа пораженных воздушных целей. Как видно из табл. 10.3, при е = 0,01 можно ограничиться четырьмя итерациями, при е = 0,02 достаточно одной итерации.

Расчеты существенно сокращаются и упрощаются при наличии исходного плана, близкого к оптимальному. Поэтому рекомендуется в качестве такого плана брать приближенный результат решения подобной задачи, выполненной методами динамического программирования.

Пример 3.7

Два партнера по бизнесу решают вложить капиталы в общее предприятие. На основе предшествующего опыта можно судить о вероятности успеха обоих партнеров ($P_1 = 0,5$, $P_2 = 0,3$), а также о величине (доле) их возможных финансовых потерь ($C_1 = 0,8$, $C_2 = 0,4$).

Известны также пределы капиталовложений партнеров:

– минимальное капиталовложение 1-го партнера $\alpha_1 = 1$, 2-го $\alpha_2 = 7$,

– максимальное капиталовложение 1-го партнера $\beta_1 = 2$, 2-го $\beta_2 = 10$.

Задана также требуемая вероятность решения задачи $W_3 = 0,9$.

Необходимо найти оптимальные капиталовложения обоих партнеров $x_1^{опт}$ и $x_2^{опт}$, обеспечивающие заданные вероятности успеха и обращающие в минимум потери партнеров (целевую функцию):

$$y = c_1x_1 + c_2x_2. \qquad (3.57)$$

При этом должны учитываться ограничения

$$\alpha_1 \le x_1 \le \beta_1,$$
$$\alpha_2 \le x_2 \le \beta_2. \qquad (3.58)$$

Решение

Данную задачу удобно решать методом так называемых приращений. Сущность метода заключается в следующем:

– минимизация целевой функции (3.57) достигается методом последовательных приближений (итераций);

– в качестве исходного набора значений искомой переменной $X_0 = (x_{10}, x_{20})$ берутся их минимальные значения α_1, α_2;

– на первом шаге итерации каждому из аргументов дается определенное приращение Δx_{10} и Δx_{20}, вытекающее из условия (3.61) – см. ниже; полученные в результате переменные образуют "чистый" набор $X_1 = (x_{11}, x_{22})$;

– из X_0 и X_1 составляются два "комбинированных" набора, в каждом из которых один из аргументов соответствует новому значению, а второй оставлен прежним;

– на втором шаге с помощью приращений наращиваются значения аргументов "комбинированных" наборов, исходя из ограничения (3.61), снова получаются "чистые" и новые "комбинированные" наборы и т.д.;

– на каждом шаге для чистых и комбинированных наборов переменных вычисляются значения целевой функции y; минимальное значение целевой функции на k-м шаге по всем “чистым” наборам данного и предшествующих шагов обозначается $\bar{y}_k$, а по всем “комбинированным” – через $\underline{y}_k$;

– итеративный процесс продолжается до тех пор, пока не будет выполнено условие

$$\bar{y}_k - \underline{y}_k \le \varepsilon, \tag{3.59}$$

где ε – требуемая точность решения задачи (оценка потерь).

Последовательность расчетов

1. Составляется исходный набор аргументов:

$$X_0 = (x_{10}; x_{20}) = (\alpha_1; \alpha_2) = (1; 2).$$

2. Рассчитывается приращение аргументов Δx, которые принимаются обратно пропорциональными потерям:

$$\left.\begin{aligned} \Delta x_{10} &= \frac{t}{C_1} = \frac{t}{0{,}8} = 1{,}25t; \\ \Delta x_{20} &= \frac{t}{C_2} = \frac{t}{0{,}4} = 2{,}5t. \end{aligned}\right\} \tag{3.60}$$

Для расчета величины t воспользуемся следующим выражением, полученным с помощью теории вероятностей (см. следующий параграф данной главы):

$$W_3 = 1 - (1 - P_1)^{x_1 - \alpha_1}(1 - P_2)^{x_2 - \alpha_2}. \tag{3.61}$$

Подставим в формулу (3.61) соответствующие значения:

$$W_3 = 0{,}9 = 1 - (1 - 0{,}5)^{x_1 - 1}(1 - 0{,}3)^{x_2 - 2};$$

$$Z = 0{,}1 - 0{,}5^{x_1 - 1} \cdot 0{,}7^{x_2 - 2} \ge 0,$$

где Z – неубывающая функция, соответствующая данному ограничению.

Параметр t определяется из граничного условия, когда Z = 0; при этом соответствующие показатели степени принимают значения Δx_{10} и Δx_{20}:

$$Z = 0{,}1 - 0{,}5^{1{,}25t} \cdot 0{,}7^{2{,}5t} = 0. \tag{3.62}$$

Из формулы (3.62) следует, что t = 1,21, а из формул (3.60), что

$$\Delta x_{10} = 1{,}25 \cdot 1{,}21 = 1{,}51; \;\; \Delta x_{20} = 2{,}5 \cdot 1{,}21 = 3{,}02.$$

3. Выполняется первый шаг итерации:

$$x_{11} = \alpha_1 + \Delta x_{10} = 1 + 1{,}51 = 2{,}51;$$
$$x_{12} = \alpha_2 + \Delta x_{20} = 2 + 3{,}02 = 5{,}02.$$

Получается чистый набор $X_1 = (x_{11};\ x_{12}) = (2{,}51;\ 5{,}02)$. Составляются два комбинированных набора (1,0; 5,02) и (2,51; 2,0).

4. Рассчитываются по формуле (3.57) значения целевой функции для чистого и комбинированных наборов, причем из двух последних выбирается минимальное:

для чистого набора $\bar{y}_1 = 0{,}8 \cdot 2{,}51 + 0{,}4 \cdot 5{,}02 = 4{,}02$; для комбинированных наборов:

первого $y_1 = 0{,}8 \cdot 1 + 0{,}4 \cdot 5{,}02 = 2{,}81$;
второго $y_1 = 0{,}8 \cdot 2{,}51 + 0{,}4 \cdot 2{,}0 = 2{,}81$;

$$\underline{y}_1 = \min(2{,}81;\ 2{,}81) = 2{,}81.$$

Оценивается $\bar{y}_1 - y_1 = 4{,}02 - 2{,}81 = 1{,}21$.

Решение на первом шаге, соответствующее данной точности в оценке потерь, берется из чистого набора и составляет

$$x_1 = 2{,}51;\ x_2 = 5{,}02 \text{ или } x_1 \approx 3;\ x_2 \approx 5.$$

Осуществляется второй шаг итерации аналогично п. 3.

Получается два чистых набора (1,87; 6,77) и (3,40; 3,79), из которых составляется четыре комбинированных (1,0; 6,77), (1,87; 5,02), (2,51; 3,79) и (3,40; 2,0).

5. Рассчитываются значения целевой функции для всех чистых наборов второго шага и выбирается минимальная величина ее на втором и предыдущем, первом шаге:

первый набор $y_2 = 0{,}8 \cdot 1{,}87 + 0{,}4 \cdot 6{,}77 = 4{,}20$;
второй набор $y_2 = 0{,}8 \cdot 3{,}40 + 0{,}4 \cdot 3{,}79 = 4{,}24$.

$$\bar{y}_2 = \min(4{,}02;\ 4{,}20;\ 4{,}24) = 4{,}02.$$

Рассчитываются значения целевой функции для всех комбинированных наборов второго шага и выбирается минимальная ее величина:

первый набор $y_2 = 0{,}8 \cdot 1{,}0 + 0{,}4 \cdot 6{,}77 = 3{,}50$;
второй набор $y_2 = 0{,}8 \cdot 1{,}87 + 0{,}4 \cdot 5{,}02 = 3{,}51$;
третий набор $y_2 = 0{,}8 \cdot 2{,}51 + 0{,}4 \cdot 3{,}79 = 3{,}53$;
четвертый набор $y_2 = 0{,}8 \cdot 3{,}40 + 0{,}4 \cdot 2{,}0 = 3{,}52$.

$$\underline{y}_2 = \min(3{,}50;\ 3{,}51;\ 3{,}53;\ 3{,}52) = 3{,}50.$$

Оценивается $\bar{y}_2 - \underline{y}_2 = 4{,}02 - 3{,}50 = 0{,}52$.

На втором шаге решение, соответствующее данной точности в оценке потерь, берется из того чистого набора, для которого y меньше, и составляет $x_1 = 1{,}87$; $x_2 = 6{,}77$ или $x_1 \approx 2$; $x_2 \approx 7$.

В последующих шагах разность $\bar{y}_k - \underline{y}_k$ продолжает убывать. При этом нужно следить, чтобы величина необходимого капитала первого и второго партнеров не превышала величин β_1 и β_2 соответственно. Если капиталы получаются более указанных пределов, следует остановиться на их предельных значениях.

Если ограничиться точностью в оценке потерь $\varepsilon = 1$ % от величины y, то для решения задачи потребуется еще три шага.

Динамическое программирование (планирование)

Динамическое программирование (планирование) служит для выбора наилучшего плана выполнения многоэтапных действий. Для многоэтапных действий характерно протекание во времени. Кроме действий, естественно носящих многоэтапный характер (например, перспективное планирование), в ряде задач прибегают к искусственному расчленению на этапы, с тем чтобы сделать возможным применение метода динамического программирования.

В общем виде постановка задачи динамического программирования сводится к следующему.

Имеется некоторая управляемая операция (целенаправленное действие), распадающаяся (естественно или искусственно) на m шагов – этапов. На каждом шаге осуществляется распределение и перераспределение участвующих в операции с целью улучшения ее результата в целом. Эти распределения в динамическом программировании называются управлениями операцией и обозначаются буквой U. Эффективность операции в целом оценивается тем же показателем, что и эффективность ее управления W(U).

При этом эффективность управления W(U) зависит от всей совокупности управлений на каждом шаге операции:

$$W = W(U) = W(U_1, U_2, ..., U_m). \tag{3.63}$$

Управление, при котором показатель W достигает максимума, называется оптимальным управлением. Оптимальное управление обозначается буквой U.

Оптимальное управление многошаговым процессом состоит из совокупности оптимальных шаговых управлений:

$$U = (U_1, U_2, ..., U_m). \qquad (3.64)$$

Задача динамического программирования – определить оптимальное управление на каждом шаге U_i ($i = 1, 2, ..., m$) и, тем самым, оптимальное управление всей операцией в целом.

В большинстве практических задач принимается, что показатель эффективности операции W в целом представляет собой сумму эффективности действий на всех этапах (шагах) операции:

$$W = \sum_{i=1}^{m} \omega_i, \qquad (3.65)$$

где ω_i – эффективность операции на i-м шаге.

При этом в случае оптимального управления

$$W = \max \sum_{i=1}^{m} \omega_i. \qquad (3.66)$$

Существо решения задач динамического программирования заключается в следующем:

– оптимизация производится методом последовательных приближений (итераций) в два круга; вначале от последнего шага операции к первому, а затем наоборот – от первого к последнему;

– на первом круге, идя от последующих шагов к предыдущим, находится так называемое условное оптимальное управление; условное оптимальное управление выбирается таким, чтобы все предыдущие шаги обеспечивали максимальную эффективность последующего шага, иными словами, на каждом шаге имеется такое управление, которое обеспечивает оптимальное продолжение операции; этот принцип выбора управления называется принципом оптимальности;

– так продолжается до первого шага, но поскольку первый шаг не имеет предыдущего, то полученное для него условное оптимальное управление теряет свой условный характер и становится просто оптимальным управлением, которое мы ищем;

– второй круг оптимизации начинается с первого шага, для которого оптимальное управление известно.

Имея для всех шагов после него условные оптимальные управления, мы знаем, что необходимо делать на каждом последующем шаге. Это дает нам возможность последовательно переходить от условных к оптимальным управлениям для всех последующих шагов, что обеспечивает оптимальность операции в целом.

Пусть имеется m типов различных грузов, которыми необходимо загрузить транспортное средство (корабль, самолет, автомобиль) таким образом, чтобы общая ценность груза W была максимальной. Ценность груза является функцией от грузоподъемности транспортного средства:

$$W = f(G). \tag{3.67}$$

Известны массы грузов i-го типа P_i и их стоимости C_i.

Необходимо загрузить транспортное средство таким образом, чтобы общая ценность груза была максимальной:

$$W = f_m(G) = \max \sum_{i=1}^{m} x_i C_i, \tag{3.68}$$

где x_i – число предметов груза i-го типа, загружаемых в транспортное средство; x_i выступает здесь в качестве управления ($U_i = x_i$).

Ограничивающими условиями являются:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i P_i \le G; \tag{3.69}$$

$$x_i = 0, 1, 2... \tag{3.70}$$

Первое условие требует, чтобы общая масса груза не превышала грузоподъемности транспортного средства, а второе – чтобы предметы, составляющие груз различных типов, были неделимы.

Пример 3.8

Самолет грузоподъемностью G = 83 условных единицы груза предполагается загрузить четырьмя типами груза (m = 4). Массы и стоимость грузов i-го типа в условных единицах заданы в табл. 3.23.

Необходимо загрузить самолет таким образом, чтобы общая ценность груза была максимальной.

Таблица 3.23

Массы и стоимости груза i-го типа (в условных единицах)

Показатель, условные единицы	Тип груза, i			
	1	2	3	4
P_i	10	16	22	24
C_i	20	50	85	96

Решение

В данном примере нет естественного разделения операции загрузки на шаги. Такое разделение, в интересах решения задачи, целесообразно ввести искусственно, принимая за шаги загрузку самолета предметами различных типов. Таких шагов будет четыре.

Последовательность расчетов при этом будет следующей.

На первом круге оптимизация начинается с четвертого типа груза – четвертого шага. При этом принимается, что самолет загружают только предметами 4-го типа. В этих условиях максимальная ценность груза на четвертом шаге

$$\omega_4 = f_4(G) = \max \{x_4, C_4\} \qquad (3.71)$$

при условиях, вытекающих из условий (3.69) и (3.70),

$$x_4 P_4 \le G;$$

$$x_4 = 0, 1, 2, ...$$

Из первого условия следует, что

$$x_4 \le \frac{G}{P_4};\ x_4 \le \frac{83}{24};\ x_4 \le 3{,}46.$$

Из второго условия следует, что x_4 может быть только целым числом, поэтому в качестве x_4 берется целая часть полученной дроби:

$$x_4 = \left| \frac{G}{P_Ц} \right| = | 3{,}46 | = 3.$$

Это и есть условное оптимальное управление на последнем, четвертом шаге:

$$U_4 = x_4 = 3.$$

Максимальная ценность груза при такой загрузке определяется по формуле (3.71):

$$\omega_4 = f_4(G) = \max \{3 \cdot 96\} = 288.$$

Переходим к предыдущему, третьему шагу, на котором самолет загружается предметами четвертого типа и, кроме того, предметами третьего типа.

Взяв на этом шаге x_3 предметов третьего типа, мы тем самым устанавливаем, что количество предметов четвертого типа по весу не может быть более $(G - x_3P_3)$. Максимальная ценность этого груза равна $f_4(G - x_3P_3)$.

Максимальная ценность груза, состоящего из предметов четвертого и третьего типов, определится по формуле, вытекающей из формулы (3.68), с ограничениями (3.69) и (3.70):

$$f_3(G) = \max\{x_3C_3 + f_4(G - x_3 P_3)\} \qquad (3.72)$$

при

$$0 \le x_3 < \left|\frac{G}{P_3}\right|. \qquad (3.73)$$

Расчет по формуле (3.72) производится следующим образом.

Из ограничения (3.73) следует

$$0 \le x_3 < \frac{83}{22}.$$

Это означает, что x_3 может принимать значение не больше:

$$x_3 = 0, 1, 2, 3.$$

Для каждого из этих четырех значений вычисляется величина, стоящая в фигурных скобках формулы (3.72), причем $f_4(G)$ рассчитывается по формуле (3.71):

x_3	$\{x_3 \cdot 85 + f_4(83 - x_3 \cdot 22)\}$
0	$\{0\cdot 85 + f_4(83 - 0\cdot 22)\} = \{0 + f_4(83)\} = \left\{0 + \left\|\frac{83}{24}\right\| 96\right\} =$ $= \{0 + 288\} = 288;$
1	$\{1\cdot 85 + f_4(83 - 1\cdot 22)\} = \{85 + f_4(61)\} = \left\{85 + \left\|\frac{61}{24}\right\| 96\right\} =$ $= \{85 + 192\} = 277;$
2	$\{2\cdot 85 + f_4(83 - 2\cdot 22)\} = \{170 + f_4(39)\} = \left\{170 + \left\|\frac{39}{24}\right\| 96\right\} =$ $= \{170 + 96\} = 266;$

$$3 \quad \left\{3 \cdot 85 + f_4(83 - 3 \cdot 22)\right\} = \left\{255 + f_4(17)\right\} = \left\{255 + \left|\frac{17}{24}\right| 96\right\} = \\ = \left\{255 + 0\right\} = 255.$$

Затем рассчитывается максимальная из полученных величин:

$$f_3(G) = \max\,(288;\ 277;\ 266;\ 255) = 288.$$

Соответствующее этой наибольшей ценности количество груза $x_3 = 0$ и будет условным оптимальным управлением на третьем шаге:

$$U_3 = x_3 = 0.$$

Далее переходим к предыдущему, второму шагу – к загрузке предметов второго типа – и для него аналогичным путем находим

$$f_2(G) = 288 \text{ и соответствующее } U_2 = x_2 = 0.$$

Точно так же, для первого шага

$$f_1(G) = 308 \text{ и } U_1 = x_1 = 1.$$

Для первого шага условное оптимальное управление одновременно является оптимальным управлением U_1^*:

$$U_1^* = U_1 = 1.$$

Начинается второй круг оптимизации от первого шага к последнему.

Поскольку нам известно, что оптимальное управление на первом шаге требует одной единицы груза первого типа, то в дальнейшем распределяется только то, что остается на остальные типы груза, а именно:

$$G' = 83 - 1 \cdot 10 = 73 \text{ единицы.}$$

Производя расчеты, аналогичные тем, которые выполнялись на первом круге, последовательно получаем оптимальные управления для второго, третьего и четвертого шага:

$$U_2^* = 0;\ U_3^* = 0;\ U_4^* = 3.$$

Оптимальное управление обеспечивает следующую максимальную общую ценность груза, рассчитываемую по формуле (3.68):

$$W = 1 \cdot 20 + 0 \cdot 50 + 0 \cdot 85 + 3 \cdot 96 = 308.$$

В рассмотренном примере оптимизация могла быть осуществлена, начиная с любого типа предметов. Принятый нами порядок соответствует общей идее динамического программирования.

Пример 3.9

Имеется пять видов ресурсов ($m = 5$), предназначенных для четырех объектов ($n = 4$). Известны характеристики объектов и ресурсов: материальный эффект при распределении на i-й объект любого ресурса (A_i) и коэффициенты α_i, характеризующие возможности каждого из ресурсов применительно к конкретным объектам. Эти характеристики заданы табл. 3.24.

Таблица 3.24

Характеристики объектов и ресурсов

Характеристики	Номера объектов			
	1	2	3	4
A_i	16	14	12	2
α_i	0,1	0,1	0,1	0,1

Необходимо определить количество ресурсов (x), использование которых на каждом из объектов обеспечит максимальный эффект.

Решение

В данном примере, так же как и в предыдущем, нет естественного разделения операции на этапы. Такое разделение в интересах решения задачи вводится искусственно. За шаги принимается последовательное распределение ресурсов по объектам. Таких шагов будет четыре.

На первом круге находится условное оптимальное управление – количество ресурсов, выделяемых на каждый объект начиная с последнего.

На первом шаге обозначим x_1 количество ресурсов, направляемых на последний объект (счет шагов ведется с конца).

При этом эффективность на последнем шаге

$$\omega_1 = f_1(x_1) = A_4 P_i = A_4\left(1 - e^{-a_4 x_1}\right) = 2 \cdot \left(1 - e^{-0,1 x_1}\right), \qquad (3.74)$$

где

$$P_i = 1 - e^{-\alpha_1 x}. \qquad (3.75)$$

Значение x_1 нам неизвестно, так как это то количество ресурсов, которое осталось от условного оптимального управления на предпоследнем (втором с конца) шаге.

Переберем все возможные значения x_1 и для каждого из них произведем расчет $f_1(x_1)$ по формуле (3.74).

Как видно из условия задачи, x_1 может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4, 5. Для этих значений и произведем расчет (табл. 3.25).

Таблица 3.25

Возможные значения x_1 и эффективности $f_1(x_1)$

x_1	$f_1(x_1)$
0	0
1	0,190
2	0,363
3	0,518
4	0,659
5	0,787

На втором шаге (с конца) выделяется x_2 ресурсов на предпоследний объект, а соответствующая эффективность на этом шаге ω_2 должна учитывать, помимо эффекта от второго шага, также и эффект в результате условного оптимального управления на первом (с конца) шаге:

$$\omega_2 = A_{n-1}\left[1 - e^{-a_{n-1}(x_2 - x_1)}\right]. \tag{3.76}$$

Максимальный эффект, получаемый за два шага, находится по формуле, аналогичной формуле (3.74):

$$f_2(x_2) = \max\left\{A_3\left(1 - e^{-a_3(x_2 - x_1)}\right) + A_4\left(1 - e^{-a_4 x_1}\right)\right\}, \tag{3.77}$$

$$0 \le x_1 \le x_2.$$

Поскольку x_2 – число ресурсов, предназначенных для поражения как предпоследнего, так и последнего объекта, то $x_2 \ge x_1$. Исходя из этого, делают предположения о всех возможных значениях x_2 (x_2 = 0, 1, 2, 3, 4, 5) и для каждого из них рассчитывается эффективность (табл. 3.26).

Одновременно находится и значение x_1 (условное оптимальное управление), при котором $f_2(x_2)$ достигает максимума. Поскольку оно зависит от x_2, обозначим его $x_1(x_2)$ и также приведем в табл. 3.26.

Таблица 3.26

Возможные значения x_2, максимальные эффективности и соответствующие им значения $x_1(x_2)$

x_2	$f_2(x_2)$	$x_1(x_2)$
0	0	0
1	1,150	0
2	2,175	0
3	3,108	0
4	3,954	0
5	4,722	0

Далее аналогичным путем для всех возможных значений x_3 вычисляются $f_3(x_3)$ и $x_2(x_3)$ – табл. 3.27.

Таблица 3.27

Возможные значения x_3, максимальные эффективности $f_3(x_3)$ и соответствующие им значения $x_2(x_3)$

x_3	$f_3(x_3)$	$x_2(x_3)$
0	0	0
1	1,330	0
2	2,541	0
3	3,508	2
4	4,680	2
5	5,804	2

Аналогичным путем рассчитывается и условное оптимальное управление на четвертом (с конца) шаге. Но поскольку на этом шаге мы подошли к исходному (начальному) значению количества единиц ресурсов (ед.р.), предназначенных для всех объектов (m = 5), то величина x_3 определяется только для $x_4 = 5$. Как показывает расчет,

$$x_3(x_4 = 5) = 2.$$

Начинается второй круг оптимизации в обратном порядке (от четвертого шага к первому). Поскольку вначале у нас для всех объектов имеется 5 ед.р., а после выделения ресурсов на один из объектов в соответствии с условным оптимальным управлением на все остальные должны остаться $x_3(x_4) = 2$ ед.р., то оптимальное управление на четвертом (с конца) шаге

$$U_4^* = x_4 = 5 - 2 = 3 \text{ ед.р.}$$

Оптимальное управление на третьем (с конца) шаге должно быть таким, чтобы при распределении оставшихся 5 – 2 = 3 ед.р. выдерживался принцип оптимальности. Как мы уже знаем, при этом $x_3^* = x_3(x_4) = 2$.

Как показывает анализ таблиц 3.25, 3.26 и 3.27,

$$\text{при } x_3 = 2 \;\; x_2(x_3) = 0,$$
$$\text{при } x_2 = 0 \;\; x_1(x_2) = 0.$$

Следовательно, $x_2^* = x_1^* = 0$.

Итак, оптимальным целераспределением будет:

$U_4^* = 3$ ед.р., $U_3^* = 2$ ед.р., $U_2^* = 0$ ед.р., $U_1^* = 0$ ед.р.

Общий ущерб при этом

$$W = 16 \cdot (1 - e^{-0,1 \cdot 3}) + 14 \cdot (1 - e^{-0,1 \cdot 2}) + 12 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 6,68.$$

Пример 3.10

Имеется семь единиц ресурсов ($m = x_0 = 7$), распределяемых между двумя предприятиями-партнерами в многоэтапной операции.

Первому предприятию выделяется y, а второму $(x - y)$ единиц ресурсов. Операция выполняется в три этапа ($n = 3$). На каждом из этапов эффективность использования ресурсов на первом предприятии составляет $g(y) = 0,4y^2$, а на втором – $h(x - y)$, где g и h – коэффициенты эффективности деятельности каждого из предприятий.

Вследствие расходования ресурсов на каждом этапе операции количество ресурсов на первом предприятии уменьшается до $0,6y$, а на втором – до $0,9(x - y)$.

К началу очередного этапа ресурсы перераспределяются.

Необходимо найти оптимальное распределение ресурсов на каждом этапе операции и общую эффективность.

Решение

В данной задаче существует естественное разделение операции на шаги – этапы действий. Таких шагов три.

На каждом этапе предприятия имеют эффективности, пропорциональные выделенным ресурсам: первое предприятие эффективность $g(x_0)$, второе – $h(x_0 - y_0)$.

После первого этапа действий (шага решения задачи) суммарная эффективность обоих предприятий

$$\omega_1 = f_1(x_0, y_0) = g(y_0) + h(x_0 - y_0). \qquad (3.78)$$

В процессе операции имеющиеся ресурсы расходуются, вследствие чего по окончании каждого этапа действий количество ресурсов первого предприятия уменьшается до величины $ay_0 (0 \le a < 1)$, второго – до величины $b(x_0 - y_0)$, причем $0 \le b < 1$. Здесь a и b – коэффициенты, показывающие, какая доля ресурсов сохраняется по окончании каждого этапа.

К началу каждого следующего этапа оставшиеся ресурсы перераспределяются между предприятиями.

Количество ресурсов, оставшихся к началу второго этапа операции (x_1), равно:

$$x_1 = ay_0 + b(x_0 - y_0), \qquad (3.79)$$

или иначе:

$$x_1 = y_1 + (x_1 - y_1),$$

где $0 \le y_1 \le x_1$.

По окончании второго этапа операции суммарная эффективность обоих предприятий составляет

$$\omega_2 = g(y_1) + h(x_1 - y_1), \qquad (3.80)$$

и общая эффективность за два этапа операции:

$$f_2(x_0, y_0, y_1) = g(y_0) + h(x_0 - y_0) + g(y_1) + h(x_1 - y_1). \qquad (3.81)$$

Аналогично общая эффективность для n этапов операции

$$f_n(x_0, y_0, y_1, ..., y_{n-1}) = g(y_0) + h(x_0 - y_0) + ... +$$
$$+ g(y_{n-1}) + h(x_{n-1} - y_{n-1}). \qquad (3.82)$$

Необходимо распределить ресурсы между предприятиями на каждом этапе таким образом, чтобы общая эффективность операции была максимальной.

На первом круге расчетов находится условное оптимальное управление. На первом шаге (с конца) по формуле (3.74) определяется эффективность ω_1 для всех возможных значений x от 0 до $x_0 = 7$ при $y \le x_0$.

Результаты расчетов даны в табл. 3.28 (5-й столбец).

Далее для каждого x определяется максимальное значение ω_1, а также значение y_1, при котором этот максимум получается. Максимальные значения ω_1 в табл. 3.28 обведены прямоугольниками и выписаны в отдельную табл. 3.29 (3-й столбец).

В этой же таблице выписаны соответствующие значения x (1-й столбец) и y_1 (2-й столбец).

На втором шаге (с конца) по формуле (3.78) производится расчет ресурсов, оставшихся к началу этого шага (x_1), и вносится в табл. 3.28 (6-й столбец). Затем по полученным значениям x_1 с помощью табл. 3.29, путем интерполяции по x, рассчитываются соответствующие значения $f_1(x)$ и вносятся в табл. 3.28 (7-й столбец).

Далее рассчитывается общая эффективность действий за два первых шага:

$$\omega_2 = \omega_1 + f(x). \tag{3.83}$$

Результаты расчетов ω_2 помещаются в табл. 3.28 (8-й столбец). Максимальные значения ω_2 в табл. 3.28 обведены прямоугольником и выписаны вместе с соответствующими значениями y_2 в табл. 3.29 (4-й и 5-й столбцы).

На третьем шаге (с конца) аналогичным образом рассчитываются x_2, $f_2(x)$, $\omega_3 = \omega_1 + f_2(x)$.

Поскольку для этого шага существует единственное значение $x = x_0 = 7$, то расчет производится только для случая $x = 7$ (табл. 3.30).

Из анализа табл. 3.30 видно, что условное оптимальное управление на третьем шаге, соответствующем максимальной эффективности (она обведена прямоугольником), равно 7. Это, как мы знаем, одновременно и оптимальное управление на этом шаге:

$$U^* = y^* = 7.$$

Начинается второй круг оптимизации (в обратном порядке).

Поскольку вначале имеется $x_0 = 7$ и оптимальное управление па первом шаге (с начала) $y_1^* = 7$, то в соответствии с табл. 3.28 $x_1 = 4{,}2$. По этому значению x_1 в табл. 3.29 находим оптимальное управление на втором шаге $y_2^* = 0$.

Аналогичным путем определяем $y_3 = 3{,}8$.

Итак, на первом этапе операции первому предприятию следует выделить все 7 единиц ресурсов, на втором этапе – 0 единиц и на третьем – 3,8 единиц. Это обеспечивает максимальную эффективность операции в целом, равную в соответствии с формулой (3.82)

$$W = 0{,}4 \cdot 7^2 + (7–7) + 0{,}4 \cdot 0^2 + (4{,}2–0) + 0{,}4 \cdot (3{,}8)^2 + (3{,}8–3{,}8) =$$
$$=19{,}6 + 4{,}2 + 5{,}8 = 29{,}6.$$

Таблица 3.28

Данные расчетов ω_i

x	$y \le x$	$g(y)$	$h(x-y)$	ω_1	x_1	$f_1(x)$	ω_2
2	0	0	2	$\boxed{2,0}$	–	–	$\boxed{2,0}$
	1	0,4	1	1,4	–	–	–
	2	1,6	0	1,6	–	–	–
3	0	0	3	3,0	2,7	3,1	$\boxed{6,1}$
	1	0,4	2	2,4	2,4	2,6	5,0
	2	1,6	1	2,6	2,1	2,2	4,8
	3	3,6	0	$\boxed{3,6}$	1,8	2,0	–
4	0	0	4	4,0	3,6	5,3	$\boxed{9,3}$
	1	0,4	3	3,4	3,3	4,4	7,8
	2	1,6	2	3,6	3,0	3,6	7,2
	3	3,6	1	4,6	2,7	3,1	7,7
	4	6,4	0	$\boxed{6,4}$	2,4	2,6	9,0
5	0	0	5	5,0	4,5	8,2	13,2
	1	0,4	4	4,4	4,2	7,1	11,5
	2	1,6	3	4,6	3,9	6,1	10,7
	3	3,6	2	5,6	3,6	5,3	10,9
	4	6,4	1	7,4	3,3	4,4	11,8
	5	10,0	0	$\boxed{10,0}$	3,0	3,6	$\boxed{13,6}$
6	0	0	6	6,0	5,4	11,8	17,8
	1	0,4	5	5,4	5,1	10,4	15,8
	2	1,6	4	5,6	4,8	9,3	14,9
	3	3,6	3	6,6	4,5	8,2	14,8
	4	6,4	2	8,7	4,2	7,1	15,5
	5	10,0	1	11,0	3,9	6,1	17,1
	6	14,4	0	$\boxed{14,4}$	3,6	5,3	$\boxed{19,7}$
7	0	0	7	7,0	6,3	15,4	22,4
	1	0,4	6	6,4	6,0	14,4	20,8
	2	1,6	5	6,6	5,7	13,1	19,7
	3	3,6	4	7,5	5,4	11,8	19,4
	4	6,4	3	9,4	5,1	10,4	19,8
	5	10,0	2	12,0	4,8	9,3	21,3
	6	14,4	1	15,4	4,5	8,2	23,6
	7	19,6	0	$\boxed{19,6}$	4,2	7,1	$\boxed{26,7}$

Таблица 3.29

Данные расчетов max ω_1 и соответствующих им y_i

x	y_1	max ω_1	y_2	max ω_2
2	0	2,0	0	2,0
3	3	3,6	0	6,1
4	4	6,4	0	9,3
5	5	10,0	5	13,6
6	6	14,4	6	19,7
7	7	19,6	7	26,7

Таблица 3.30

Данные расчетов

y	0	1	2	3	4	5	6	7
$f_2(x)$	21,8	19,7	17,9	16,0	14,2	12,7	11,3	10,1
ω_3	28,8	26,1	24,5	23,6	23,6	24,7	26,7	$\boxed{29,7}$

§ 2. Теория вероятностей и математическая статистика

Основные понятия

В экономических задачах приходится сталкиваться с двумя типами явлений. Первый тип – явления неслучайные, второй – случайные.

Неслучайными называются такие явления, которые при повторении в одинаковых условиях приводят к одному и тому же результату.

Явления, которые при повторении в одинаковых условиях приводят к различным результатам, называются случайными.

Наука, изучающая закономерности в случайных явлениях, называется теорией вероятностей.

Всякий результат явления называется событием. События могут быть:

– достоверными, т.е. такими, которые неизбежно наступают при каждом испытании;

– невозможными, т.е. такими, которые заведомо не могут произойти;

– случайными, т.е. такими, которые могут в результате испытания либо произойти, либо не произойти.

Степень возможности появления того или иного случайного события называется *вероятностью*.

Для непосредственного подсчета вероятностей в некоторых задачах исходят из *частоты* ($P^*_{(A)}$):

$$P^*_{(A)} = \frac{m}{n}, \tag{3.84}$$

где m – число случаев появления интересующего нас события; n – общее число испытаний (опытов).

Пример 3.11

Некий предприниматель, прежде чем принять решение в неопределенной ситуации, подбрасывал монетку: выпадет герб – решение положительное, выпадет цифра – отрицательное.

Какова вероятность того, что любое принятое таким образом решение окажется положительным ?

Решение

Подбросим монету 10 раз и получим, например, такие результаты:

1) Герб $P^*_{(г)} = \frac{1}{1} = 1;$

2) Герб $P^*_{(г)} = \frac{2}{2} = 1;$

3) Цифра $P^*_{(г)} = \frac{2}{3} = 0,66;$

4) Герб $P^*_{(г)} = \frac{3}{4} = 0,75;$

5) Цифра $P^*_{(г)} = \frac{3}{5} = 0,6;$

6) Герб $P^*_{(г)} = \frac{4}{6} = 0,66;$

7) Цифра $P^*_{(г)} = \frac{4}{7} = 0,57;$

8) Герб $P^*_{(г)} = \frac{5}{8} = 0,62;$

9) Цифра $P^*_{(г)} = \frac{5}{9} = 0,55;$

10) Цифра $P^*_{(г)} = \frac{5}{10} = 0,5.$

С увеличением числа испытаний колебания частоты уменьшаются и частота становится практически устойчивой (рис. 3.4). Такую устойчивую частоту принимают равной вероятности интересующего нас события.

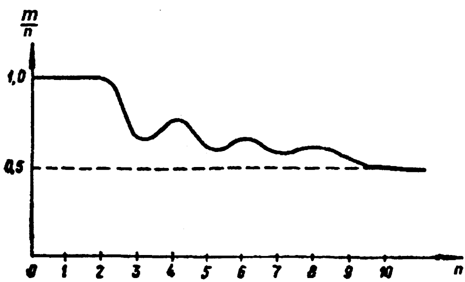

Рис. 3.4

Проведением опытов для получения вероятностей и обработкой их результатов занимается математическая статистика. В примере с подбрасыванием монеты число опытов – подбрасываний монеты взято произвольно: на самом деле для получения достоверного значения вероятности это число должно быть значительно больше.

Вероятность от частоты отличается тем, что частота – это результат опыта, а вероятность – прогноз.

На основе частоты можно вывести так называемую формулу вероятности:

$$P_{(A)} = \frac{m}{n}, \tag{3.85}$$

где m – число шансов, благоприятных появлению интересующего нас события; n – общее число равновозможных шансов.

Пример 3.12

Статистические данные свидетельствуют, что при вложении капитала размером в 100 тыс. у.д.ед. в строительство прибыль была получена в 18 случаях из 90.

Какова вероятность получения прибыли от вложения упомянутых 100 тыс. у.д.ед. в строительство?

Решение

Вероятность рассчитывается по формуле:

$$\frac{\text{Количество благоприятных случаев}}{\text{Общее количество равновозможных случаев}} = \frac{18}{90} = 0{,}2, \text{ или } 20\ \%.$$

Пример 3.13

В пруду развели множество карпов. Подумайте, как можно сосчитать эту рыбу, не спуская из пруда воду.

Решение

Необходимо вначале отловить 100 карпов, пометить их и выпустить обратно.

Затем, дав рыбам время успокоиться, снова отловить 100 карпов и сосчитать, сколько среди них меченых. К примеру, меченых оказалось 4 рыбы. Это означает, что 4 % рыбы в водоеме меченые. Но, с другой стороны, мы знаем, что меченых рыб 100. Следовательно, 100 карпов составляют 4 % от всего количества рыбы в пруду; значит, 100 % составит

$$100 \cdot \frac{100\,\%}{4\,\%} = 2500 \text{ рыб.}$$

По формулам, аналогичным (3.85), производится расчет так называемой "геометрической" вероятности, которая исходит из геометрических представлений о симметрии и пропорциональности.

Пример 3.14

На территории предприятия произошла авария водопровода. Общая длина водопровода L = 150 м. В том числе 50 м трубы (l) приходятся на труднодоступные места.

Какова вероятность того, что ремонт придется производить именно на труднодоступном участке?

Решение

$$P = \frac{l}{L} = \frac{50}{150} = 0{,}33.$$

Подобные расчеты геометрической вероятности можно производить лишь в случае равномерного распределения благоприятных шансов среди всех возможных.

Основные свойства вероятностей можно сформулировать следующим образом:

1. Вероятность случайного события есть число положительное:

$$P_{(A)} \geq 0.$$

2. Достоверное событие имеет вероятность, равную 1:

$$P_{(u)} = 1.$$

3. Невозможное событие имеет вероятность, равную 0:

$$P_{(V)} = 0.$$

4. Вероятность появления случайного события находится в пределах между 0 и 1:

$$0 \leq P_{(A)} \leq 1.$$

Основные теоремы теории вероятностей

В основе любого расчета вероятности лежат опытные данные или соображения, основанные на симметричности (монета), однако такое непосредственное определение вероятности весьма ограничено, так как на практике приходится иметь дело не с простыми, а с весьма сложными событиями.

Поэтому основное содержание теории вероятностей сводится к разработке методов и приемов расчета вероятности сложных событий на основе известных (элементарных) вероятностей.

Для этого и предназначены основные теоремы теории вероятностей.

Теорема сложения вероятностей (для несовместных событий)

Если A и B – два несовместные события, то вероятность того, что произойдет одно из них (безразлично какое), равна сумме их вероятностей:

$$P_{\text{А или В}} = P_{(A)} + P_{(B)} \text{ (теорема “или–или”).} \qquad (3.86)$$

Несовместные события – это события, при которых появление одного исключает другое. Например, положительный или отрицательный исход данной экономической операции.

Совместные события – это такие события, которые не исключают одно другое. Например, положительный исход операции и при этом малые фактические издержки.

Пример 3.15

Вероятность того, что приобретенный товар произведен в Италии, $P_{И} = 0{,}4$, а того, что он произведен в Турции, $P_{Т} = 0{,}3$.

Какова вероятность того, что товар произведен в одной из этих стран: или в Италии, или в Турции ($P_{\text{И или Т}}$)?

Решение

Применим теорему сложения вероятностей:

$$P_{\text{И или Т}} = P_{И} + P_{Т} = 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}7.$$

Следствие 1. Сумма вероятностей несовместных и единственно возможных событий равна единице. Единственно возможные события – когда в результате испытания неизбежно происходит хотя бы одно из них. Они образуют полную группу событий.

Следствие 2. Вероятность противоположного события $P_{(\bar{A})}$ равна 1 минус вероятность самого этого события:

$$P_{(\bar{A})} = 1 - P_{(A)}. \quad (3.87)$$

Противоположные события – два несовместных и единственно возможных события.

Пример 3.16

В денежно-вещевой лотерее на серию в 10 000 билетов приходится 120 денежных и 80 вещевых выигрышей.

Найти вероятности:

1) получить денежный выигрыш ($P_{\text{ден}}$),
2) получить вещевой выигрыш ($P_{\text{вещ}}$),
3) получить выигрыш вообще ($P_{\text{вообще}}$),
4) ничего не выиграть ($P_{\text{ничего}}$).

Решение

$$P_{\text{ден}} = \frac{120}{10\,000} = 0{,}012.$$

$$P_{\text{вещ}} = \frac{80}{10\,000} = 0{,}008.$$

$$P_{\text{вообще}} = 0{,}012 + 0{,}008 = 0{,}02.$$

$$P_{\text{ничего}} = 1 - 0{,}02 = 0{,}98.$$

Теорема умножения вероятностей

Если А и В – два совместные независимые события, то вероятность того, что произойдут оба эти события, равна произведению их вероятностей (теорема “и–и”):

$$P_{(\text{А и В})} = P_{(A)} \cdot P_{(B)}. \quad (3.88)$$

Независимые события – это такие события, при которых вероятность одного из них не меняется от того, произошло другое или нет. Если вероятность в этом случае меняется, то события называются зависимыми. Например, вероятность своевременного получения груза и вероятность того, что упаковка груза не будет повреждена.

Пример 3.17

Вероятность своевременного получения груза $P_{сп} = 0,8$, а вероятность того, что упаковка груза не будет повреждена, $P_{ун} = 0,7$.

Какова вероятность того, что груз будет получен своевременно в неповрежденной упаковке ($P_{сн}$)?

Решение

$$P_{сн} = P_{сп} \cdot P_{ун} = 0,8 \cdot 0,7 = 0,56.$$

Теорема умножения вероятностей распространяется и на число событий больше двух.

Если вероятности простых событий (сомножители) одинаковы, то вместо умножения достаточно возвести эти вероятности в соответствующую степень:

$$P_{(А\ и\ А)} = P_{(А)} \cdot P_{(А)} = P^2_{(А)}. \qquad (3.89)$$

На практике часто приходится иметь дело с зависимыми событиями. В этом случае вероятность рассчитывается по формуле:

$$P_{(А\ и\ В)} = P_{(А)} \cdot P_{(В/А)} = P_{(А/В)} \cdot P_{(В)}, \qquad (3.90)$$

где $P_{(В/А)}$ – условная вероятность события В, если предположить, что событие А произошло.

Пример 3.18

Вероятность летной погоды $P_л = 0,9$, а вероятность того, что при условии летной погоды груз будет доставлен своевременно, $P_{с/л} = 0,8$.

Какова вероятность того, что груз будет доставлен своевременно ($P_с$)?

Решение

$$P_с = P_л \cdot P_{с/л} = 0,9 \cdot 0,8 = 0,72.$$

Теорема сложения вероятностей (для совместных событий)

Для совместных событий теорема сложения вероятностей применяется следующим образом:

$$P_{(А\ или\ В)} = P_{(А)} + P_{(В)} \cdot (1 - P_{(А)}) \qquad (3.91)$$

или, что то же самое,

$$P_{(А\ или\ В)} = P_{(А)} + P_{(В)} - P_{(А)} \cdot P_{(В)}. \qquad (3.92)$$

Пример 3.19

Ваш автомобиль снабжен двумя противоугонными приспособлениями: механическим и электрическим. Механическое имеет вероятность срабатывать 0,9 (это означает, что из 10 раз оно срабатывает в среднем 9), а у электрического вероятность срабатывания равна 0,8.

Какова вероятность того, что ваш автомобиль не угонят?

Решение

Обозначая вероятность срабатывания механического противоугонного приспособления через $P_М$, а электрического – $P_Э$, по формуле для совместных событий получим:

$$P_{М\text{ или }Э} = P_М + P_Э\,(1 - P_М) = 0{,}9 + 0{,}8\,(1 - 0{,}9) = 0{,}98, \text{ или } 98\ \%.$$

Формула полной вероятности

На практике, как правило, приходится иметь дело с несколькими вариантами события, каждый из которых имеет свою вероятность. В этом случае применяется так называемая полная вероятность события. Она рассчитывается по формуле:

$$P_{(A)} = \sum_{i=1}^{n} P_{(H_i)} \cdot P_{(A/H_i)}, \qquad (3.93)$$

где $P_{(H_i)}$ – вероятности варианта или вероятности гипотез; $P_{(A/H_i)}$ – вероятности события по данной гипотезе (варианту).

Пример 3.20

Две экономические операции, проводимые предпринимателем одновременно для достижения одной общей цели, имеют вероятности успеха, равные:

$$P_1 = 0{,}8,$$
$$P_2 = 0{,}4.$$

Необходимо рассчитать вероятность достижения цели предпринимателем ($P_ц$).

Решение

Вначале найдем вероятности возможных вариантов требуемого события (вероятности гипотез $P_{(H_i)}$):

1 – ни одна операция не принесла успеха (1–0,8) · (1–0,4) = 0,12;
2 – обе прошли успешно 0,8 · 0,4 = 0,32;
3 – первая – успешно, вторая – нет 0,8 · 0,6 = 0,48;
4 – первая – безуспешно, вторая – успешно 0,2 · 0,4 = 0,08.
Сумма: 1,00.

Далее найдем вероятности успеха при каждом варианте ($P_{(A/H_i)}$):

1 – 0 неуспех,
2 – 1 успех,
3 – 1 успех,
4 – 1 успех.

По формуле полной вероятности:

$$P_ц = \sum_{i=1}^{n} P_{(H_i)} \cdot P_{(A/H_i)} = 0{,}12 \cdot 0 + 0{,}32 \cdot 1 + 0{,}48 \cdot 1 + 0{,}08 \cdot 1 = 0{,}88.$$

С помощью формулы полной вероятности рассчитывается важная формула Бейеса. Иногда ее формулировку называют теоремой гипотез.

Формула Бейеса (теорема гипотез)

Вероятность события по данной гипотезе равна вероятности гипотезы до опыта, умноженной на вероятность события по этой гипотезе, деленную на полную вероятность, рассчитанную после опыта:

$$P_{(H_i/A)} = \frac{P_{(H_i)} \cdot P_{(A/H_i)}}{\sum_{i=1}^{n} P_{(H_i)} \cdot P_{(A/H_i)}}. \qquad (3.94)$$

Пример 3.21

В условиях предыдущего примера, после установления факта успеха, необходимо определить, каковы вероятности того, что успех был получен в результате первой либо в результате второй операции.

Решение

По формуле Бейеса вероятность того, что успех был достигнут в результате первой операции:

$$P_{(H_1/A)} = \frac{0,48 \cdot 1}{0,12 \cdot 0 + 0,32 \cdot 0 + 0,48 \cdot 1 + 0,08 \cdot 1} = \frac{0,48}{0,56} = 0,86.$$

А в результате второй:

$$P_{(H_2/A)} = \frac{0,08 \cdot 1}{0,56} = 0,14.$$

Следовательно, вероятность при тех гипотезах, которые соответствовали более высокой вероятности, увеличивается, а при тех, которые соответствовали меньшей вероятности, – уменьшается.

Вероятности появления событий при повторении опытов

На практике опыты часто повторяются в одинаковых условиях. В таких задачах надо уметь заранее определить вероятность любого возможного сочетания событий.

Пример 3.22

В определенной ситуации вероятность выигрыша на бирже в течение дня $p = 0,3$ (вероятность проигрыша соответственно $q = 1 - 0,3 = 0,7$).

Какие варианты событий возможны при биржевой игре в той же ситуации в течение двух дней ($n = 2$)?

Решение

Возможные варианты событий:

1 – оба дня выигрыш $0,3 \cdot 0,3$;

2 – первый день выигрыш, второй – проигрыш $0,3 \cdot 0,7$;

3 – первый день проигрыш, второй – выигрыш $0,7 \cdot 0,3$;

4 – оба дня проигрыш $0,7 \cdot 0,7$.

Вероятность полной группы событий будет при этом равна:

$$0,3 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,7 + 0,7 \cdot 0,3 + 0,7 \cdot 0,7 = 1,$$

или

$$p^2 + 2pq + q^2 = (p + q)^2 = 1.$$

Это формула бинома Ньютона. По ней можно находить все возможные сочетания событий при повторении опытов:

$$(p+q)^n = \sum_{m=0}^{n} P_{m,n}, \qquad (3.95)$$

где

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}. \qquad (3.96)$$

C_n^m – сочетание из n по m (см. § 4 гл. 2).

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Под сочетанием понимается число возможных комбинаций событий без учета их последовательности.

Например:

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1(1)} = \frac{6}{2} = 3.$$

П р и м е р 3.23

Что более вероятно:

1) то, что первый попавшийся вам на глаза по приезде в Москву человек окажется единственным проживающим в этом городе вашим знакомым;

2) отгадать в лотерее 6 номеров из 49? (Попробуйте вначале решить эту задачу на глаз.)

Решение

1) Вероятность того, что первый попавшийся вам по приезде в Москву человек – ваш единственный знакомый в этом городе, равна:

$$\frac{1}{\text{население Москвы}} = \frac{1}{8{,}4\ \text{млн}}.$$

2) Вероятность отгадать в лотерее 6 номеров из 49 по формулам теории вероятности равна: $\frac{1}{C_{49}^6}$, где $C^6{}_{49}$ – сочетание из 49 элементов по 6.

$$C_{49}^6 = \frac{49!}{6!(49-6)!} = 13{,}9\ \text{млн}.$$

Следовательно, вероятность отгадки равна $\frac{1}{13{,}9}$ млн, т.е. примерно в полтора раза меньше.

Вероятность появления события хотя бы один раз

$$P_{m \geq 1} = 1 - q^n, \text{ или}$$
$$P_{m \geq 1} = 1 - (1 - p)^n.$$

П р и м е р 3.24

$p = 0{,}2;\ n = 2.$

Решение

$$P_{m\geq 1} = 1 - (1 - 0{,}2)^2 = 1 - 0{,}8^2 = 1 - 0{,}64 = 0{,}36.$$

В случае, если вероятности событий меняются от испытания к испытанию:

$$P_{m\geq 1} = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)\ldots$$

Для практических расчетов пользуются приближенной формулой. Из

$$P_{m\geq 1} = 1 - (1 - p)^n, \qquad (3.97)$$

$$(1-p)^n = \left[(1-p)^{-\frac{1}{p}}\right]^{-np} \approx e^{-np},$$

так как

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \approx e, \qquad (3.98)$$

т.е. при условии малых α ($e = 2{,}718\,282$ – основание натурального логарифма).

Итак,

$$P_{m\geq 1} \approx 1 - e^{-np}. \qquad (3.99)$$

Если разложить e^{-np} в ряд, то

$$e^{-np} \approx 1 + \frac{(-np)^1}{1!} + \frac{(-np)^2}{2!} + \frac{(-np)^3}{3!} \text{ и т.д.}$$

В практических задачах для грубой прикидки достаточно ограничиться первыми двумя членами:

$$e^{-np} \approx 1 - np;$$

$$P_{n_1\geq 1} \approx 1 - (1 - np) = np. \qquad (3.100)$$

П р и м е р 3.25

В партии из девяти изделий два бракованных.

Какова вероятность того, что при случайной выборке из четырех изделий окажутся с браком: 1) одно; 2) два; 3) не менее одного (хотя бы одно)?

Решение

По формулам теории вероятностей и комбинаторики:

$$1)\ P_1 = \frac{C_2^1 \cdot C_7^3}{C_9^4},$$

где $C^1{}_2$ – сочетание из двух элементов по 1-му: $C_2^1 = \frac{2!}{1 \cdot 1}$, $C_7^3 = \frac{7!}{3!\,4!}$, $C_9^4 = \frac{9!}{4!\,5!}$.

Подставляя значения сочетаний в формулу вероятности, получим:

$$1)\ P_1 = \frac{70}{126},$$

$$2)\ P_2 = \frac{C_2^2 \cdot C_7^2}{C_9^4} = \frac{21}{126},$$

$$3)\ P_{\geq 1} = 1 - P_0,$$

где $P_0 = \frac{C_2^0 \cdot C_7^4}{C_9^4} = \frac{35}{126}$, $P_{\geq 1} = 1 - \frac{35}{126} = \frac{91}{126}$.

Из (3.97) следует важная для практики формула:

$$n = \frac{\lg(1 - P_{m \geq 1})}{\lg(1 - p)}. \qquad (3.101)$$

Пример 3.26

Вероятность получить высокую прибыль в некоторой коммерческой организации равна 30 % (из опыта).

Сколько нужно провести таких операций, чтобы получить эту прибыль с вероятностью 90 %?

Решение

По формуле (3.101) необходимое количество операций (n) будет равно:

$$n = \frac{\lg(1 - 0{,}9)}{\lg(1 - 0{,}3)} = \frac{\lg 0{,}1}{\lg 0{,}7} = \frac{1{,}0}{1{,}8451} = \frac{-1{,}0}{-0{,}1549} = 6 \text{ операций.}$$

Случайные величины и их характеристика

До сих пор речь шла о случайных событиях: "произошло – не произошло", "да – нет". Современная теория вероятностей пользуется главным образом случайными величинами.

Случайная величина – это такая переменная величина, которая в результате опыта может принять то или иное численное значение, причем не известно, какое именно. Например, отклонение прибыли от ожидаемого значения.

Случайные величины делятся на дискретные (прерывные) и непрерывные.

Дискретные случайные величины – это величины, могущие принимать лишь отдельные изолированные значения, которые можно заранее предусмотреть, перечислить. Например, ожидаемое количество единиц продукции: ноль, один, два. Больше никаких значений оно принимать не может.

Непрерывная случайная величина – это такая величина, которая может принимать любое из бесчисленного множества значений. Например, возможная сумма прибыли.

Для того чтобы охарактеризовать случайную величину, применяют так называемое распределение.

Распределение – характеристика случайной величины, которая показывает:

– какие значения может принимать случайная величина;

– сколь вероятно то или иное из этих значений.

Распределение дискретной случайной величины

Для этой группы случайных величин применяется два вида распределений.

1-й вид – ряд распределения:

x_1	x_1	x_2	x_3	... x_n
p_1	p_1	p_2	p_3	... p_n

Пример 3.27

Заключен договор на строительство трех одинаковых объектов. Вероятность сдачи объекта в срок $p = 0{,}2$.

Найти распределение случайной величины – количества объектов, сданных к сроку.

Решение

Обозначим через x_i количество объектов, сданных к сроку ($i = 0, 1, 2, 3$).

При этом распределение дискретной случайной величины x будет:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,216	0,432	0,288	0,064

2-й вид – многоугольник распределения. Это график, построенный по данному ряду (рис. 3.5):

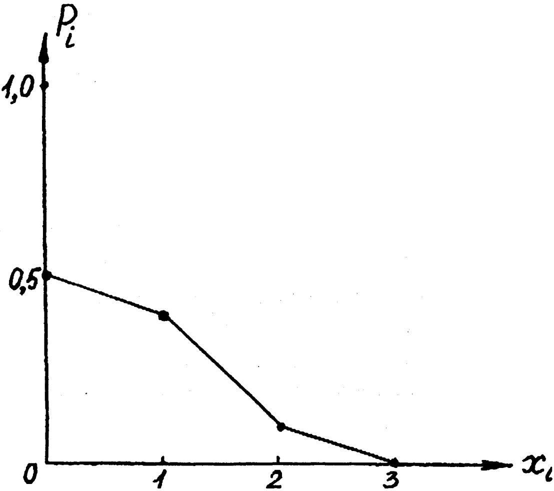

Рис. 3.5

Распределение непрерывной случайной величины

Непрерывная случайная величина подобным образом не может быть охарактеризована по двум причинам:

– у нее бесчисленное множество значений;

– вероятность каждого ее отдельного значения равна нулю.

Приходится прибегать к обходным путям.

В качестве распределения, например, применяют так называемую плотность распределения (рис. 3.6). *Плотность распределения вероятности* (или просто плотность вероятности) – это функция, подобранная так, что площадь под соответствующей ей кривой в заданных пределах есть вероятность интересующего нас события:

$$P(\alpha < x < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx; \tag{3.102}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1. \tag{3.103}$$

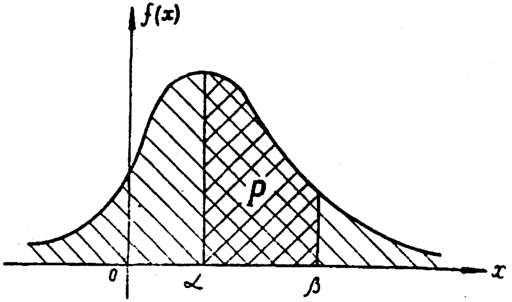

Рис. 3.6

Числовые характеристики случайных величин

Во многих практических задачах нет необходимости иметь распределение случайной величины, а достаточно воспользоваться так называемыми числовыми характеристиками, которые в сжатой форме показывают особенности этого распределения. Таких показателей несколько. Мы будем рассматривать три основных.

1. Математическое ожидание.
2. Дисперсия.
3. Среднее квадратическое отклонение.

Математическое ожидание случайной величины МО(x)

Математическим ожиданием случайной величины называется среднеожидаемое ее значение. Между МО(x) и средним арифметическим такая же связь, как между вероятностью и частотой. МО(x) имеет размерность случайной величины.

Для дискретной случайной величины

$$\text{МО}(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i. \qquad (3.104)$$

Пример 3.28

Необходимо принять решение об инвестировании некоторого капитала в один из двух проектов:

проект № 1 сулит прибыль в размере 50 млн у.д.ед. с вероятностью 40 %;

проект № 2 сулит прибыль в размере 80 млн у.д.ед. с вероятностью 20 %.

Какому проекту отдать предпочтение как наиболее прибыльному? (Проверьте вначале свою интуицию.)

Решение

Ожидаемая прибыль (математическое ожидание прибыли) находится как произведение величины предполагаемой прибыли на ее вероятность:

по проекту № 1 $50 \cdot 0{,}4 = 20$ млн у.д.ед.,

по проекту № 2 $80 \cdot 0{,}2 = 16$ млн у.д.ед.

Проект № 1 оказывается предпочтительнее как более прибыльный.

Дисперсия случайной величины

Дисперсия служит для показания степени рассеивания случайной величины относительно ее среднеожидаемого значения.

Дисперсия – это МО квадрата отклонения случайной величины от среднего значения (т.е. от МО). Квадрат берется для того, чтобы избавиться от знака минус.

$$D(x) = \text{МО}[x - \text{МО}(x)]^2. \qquad (3.105)$$

Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины. Это неудобно, поэтому на практике пользуются не дисперсией, а корнем квадратным из нее.

Среднее квадратическое отклонение случайной величины

Корень квадратный из дисперсии

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)} \qquad (3.106)$$

и есть среднее квадратическое отклонение случайной величины.

Размерность среднего квадратического отклонения есть размерность случайной величины.

Пример 3.29

В условиях примера 3.27 найти математическое ожидание $MO(x)$, дисперсию $D(x)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(x)$ случайной величины x.

Решение

$$MO(x) = 0 \cdot 0{,}216 + 1 \cdot 0{,}432 + 2 \cdot 0{,}288 + 3 \cdot 0{,}064 = 1{,}2 \text{ объекта}$$

(это можно было получить и проще – как $3 \cdot 0{,}4$);

$$D(x) = (0 - 1{,}2)^2 \cdot 0{,}216 + (1 - 1{,}2)^2 \cdot 0{,}432 + (2 - 1{,}2)^2 \cdot 0{,}288 + \\ + (3 - 1{,}2)^2 \cdot 0{,}064 = 0{,}72 \text{ объекта};$$

$$\sigma(x) = \sqrt{0{,}72} = 0{,}848 \text{ объекта.}$$

$x = (1{,}2 \pm 0{,}848)$ объекта $\approx (1 \pm 1)$ объект, т.е. в среднем следует ожидать от 0 до 2 объектов.

Законы распределения случайных величин

Под законом распределения случайной величины понимают наиболее общие свойства, связи, присущие большой группе случайных величин.

Закон выявляет нам характер этих связей.

В практических задачах больше всего приходится сталкиваться с тремя основными законами:

– законом равномерной плотности;

– законом Пуассона;

– нормальным законом.

Закон равномерной плотности

Это наиболее простой закон (рис. 3.7):

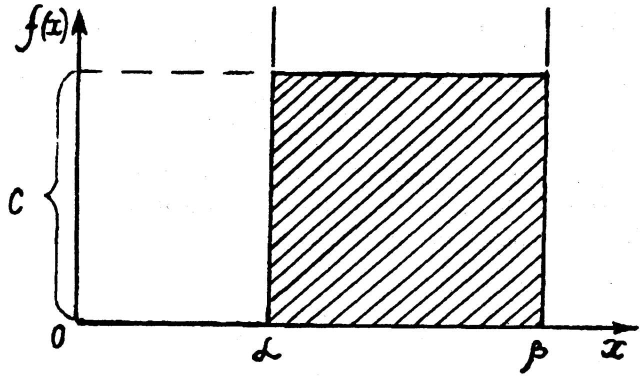

Рис. 3.7

Плотность распределения здесь равна:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= C = \frac{1}{\beta-\alpha} \quad \text{при } \alpha < x < \beta, \\ f(x) &= 0 \qquad\qquad\quad \text{при } x < \alpha \text{ или } x > \beta. \end{aligned}\right\} \tag{3.107}$$

Вероятность попадания случайной величины x, подчиненной этому закону, на участок от α до β равна:

$$P(\alpha < x < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

Числовые характеристики этого закона:

$$\left.\begin{aligned} MO(x) &= \frac{\alpha+\beta}{2}; \\ D(x) &= \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}; \\ \sigma(x) &= \frac{\beta-\alpha}{2\sqrt{3}}. \end{aligned}\right\} \tag{3.108}$$

Пример 3.30

Цена товара (x) может быть в равной степени любой, в пределах от 15 до 25 тыс. у.д.ед.

Найти МО(x), D(x) и $\sigma(x)$.

Решение

$$\text{МО}(x) = \frac{15+25}{2} = 20 \text{ тыс. у.д.ед.}$$

$$D(x) = \frac{(25-15)^2}{12} = 8{,}32 \text{ тыс. у.д.ед}^2.$$

$$\sigma(x) = \sqrt{8{,}32} = 2{,}83 \text{ тыс. у.д.ед.}$$

$$V_{ц} \approx 20 \pm 3 \text{ тыс. у.д.ед.}$$

Закон Пуассона (закон редких событий)

Закон применим для дискретных случайных величин, вероятность каждой из которых очень мала. Поэтому закон Пуассона называют законом распределения редких событий (рис. 3.8).

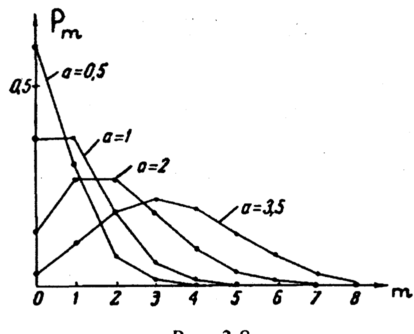

Рис. 3.8

Распределение Пуассона проиллюстрируем примером.

Пример 3.31

Известно, что среднее количество вызовов мобильной телефонной станции

$$\gamma = 1{,}75 \text{ вызова в час.}$$

Какова вероятность получения двух вызовов за 2 часа ($m = 2$, $t = 2$ ч)?

Каково математическое ожидание $MO(x)$, дисперсия $D(x)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(x)$ количества вызовов за это время?

Решение

Доказано, что вероятность получения m вызовов

$$P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \tag{3.109}$$

где $a = \gamma t$ – математическое ожидание числа вызовов за все время:

$$a = 1{,}75 \cdot 2 = 3{,}5 \text{ вызова.}$$

$$P_2 = \frac{(3{,}5)^2}{2!} e^{-3{,}5} = \frac{12{,}25}{2} \cdot 0{,}04 = 0{,}24.$$

Числовые характеристики закона Пуассона:

$$\left.\begin{aligned} MO(x) &= a, \\ D(x) &= a, \\ \sigma(x) &= \sqrt{a}. \end{aligned}\right\} \tag{3.110}$$

Значит, в условиях нашего примера:

$$MO(x) = 3{,}5 \text{ вызова,}$$

$$D(x) = 3{,}5 \text{ вызова,}$$

$$\sigma(x) = \sqrt{3{,}5} = 1{,}87 \text{ вызова.}$$

Нормальный закон распределения (закон Гаусса)

Нормальный закон играет важнейшую роль в теории вероятностей и занимает особое положение среди всех других законов. Это наиболее часто встречающийся на практике закон распределения случайных величин. Отсюда и его название – нормальный закон.

Плотность распределения нормального закона имеет следующий вид (рис. 3.9):

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

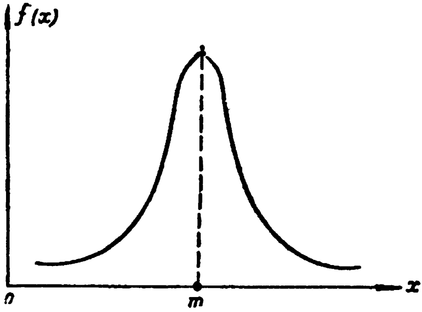

Рис. 3.9

Для удобства расчета вероятности при нормальном законе вводится понятие срединного (вероятного) отклонения. Срединное (вероятное) отклонение – половина длины участка под кривой нормального распределения, симметричного относительно центра рассеивания, в пределах которого сосредоточено 50 % вероятности (рис. 3.10).

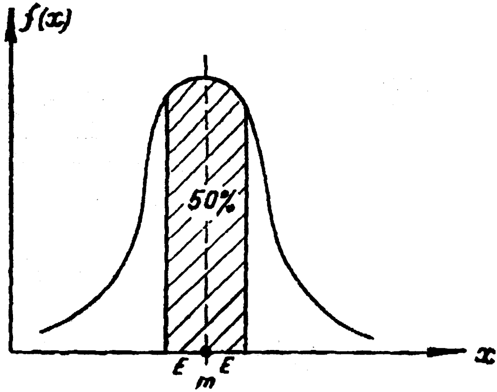

Рис. 3.10

Вероятность попадания случайной величины X, подчиненной нормальному закону, в заданный интервал от x_1 до x_2 вычисляется по формуле:

$$P\left(x_1 < X < x_2\right) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{x_2 - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - m}{\sigma}\right)\right], \qquad (3.111)$$

где
$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt \qquad (3.112)$$
($\Phi(x)$ – функция Лапласа, см. табл. 3.31),
$$t=\frac{x-m}{\sigma}.$$

Таблица 3.31

Функция Лапласа (интеграл вероятностей)

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0080	0,0160	0,0239	0,0319	0,0399	0,0478	0,0558	0,0638	0,0717
0,1	0,0797	0,0876	0,0955	0,1034	0,1113	0,1192	0,1271	0,1350	0,1428	0,1507
0,2	0,1585	0,1663	0,1741	0,1819	0,1897	0,1974	0,2051	0,2128	0,2205	0,2282
0,3	0,2358	0,2434	0,2510	0,2586	0,2661	0,2737	0,2812	0,2886	0,2961	0,3035
0,4	0,3108	0,3182	0,3255	0,3328	0,3401	0,3473	0,3545	0,3616	0,3688	0,3759
0,5	0,3829	0,3899	0,3969	0,4039	0,4108	0,4177	0,4245	0,4313	0,4381	0,4448
0,6	0,4515	0,4581	0,4647	0,4713	0,4778	0,4843	0,4907	0,4971	0,5035	0,5098
0,7	0,5161	0,5223	0,5285	0,5346	0,5407	0,5467	0,5527	0,5587	0,5646	0,5705
0,8	0,5763	0,5821	0,5878	0,5935	0,5991	0,6047	0,6102	0,6157	0,6211	0,6265
0,9	0,6319	0,6372	0,6424	0,6476	0,6528	0,6579	0,6629	0,6680	0,6729	0,6778
1,0	0,6827	0,6875	0,6923	0,6970	0,7017	0,7063	0,7109	0,7154	0,7199	0,7243
1,1	0,7287	0,7330	0,7373	0,7415	0,7457	0,7499	0,7540	0,7580	0,7620	0,7660
1,2	0,7699	0,7737	0,7775	0,7813	0,7850	0,7887	0,7923	0,7959	0,7995	0,8029
1,3	0,8064	0,8098	0,8132	0,8165	0,8198	0,8230	0,8262	0,8293	0,8324	0,8355
1,4	0,8385	0,8415	0,8444	0,8473	0,8501	0,8529	0,8557	0,8584	0,8611	0,8638
	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,5	0,8664	0,8670	0,8715	0,8740	0,8764	0,8789	0,8812	0,8936	0,8859	0,8882
1,6	0,8904	0,8926	0,8948	0,8969	0,8990	0,9011	0,9031	0,9051	0,9070	0,9090
1,7	0,9109	0,9127	0,9146	0,9164	0,9181	0,9199	0,9216	0,9233	0,9249	0,9265
1,8	0,9281	0,9297	0,9312	0,9328	0,9342	0,9357	0,9371	0,9385	0,9399	0,9412
1,9	0,9426	0,9439	0,9451	0,9464	0,9476	0,9488	0,9500	0,9512	0,9523	0,9534
2,0	0,9545	0,9556	0,9566	0,9576	0,9586	0,9596	0,9606	0,9616	0,9625	0,9634
2,1	0,9643	0,9651	0,9660	0,9668	0,9676	0,9684	0,9692	0,9700	0,9707	0,9715
2,2	0,9722	0,9729	0,9736	0,9742	0,9749	0,9756	0,9762	0,9768	0,9774	0,9780
2,3	0,9786	0,9791	0,9797	0,9802	0,9807	0,9812	0,9817	0,9822	0,9827	0,9832
2,4	0,9836	0,9840	0,9845	0,9849	0,9853	0,9857	0,9861	0,9865	0,9869	0,9872
2,5	0,9876	0,9879	0,9883	0,9886	0,9889	0,9892	0,9895	0,9898	0,9901	0,9904
2,6	0,9907	0,9910	0,9912	0,9915	0,9917	0,9920	0,9922	0,9924	0,9926	0,9928
2,7	0,9931	0,9933	0,9935	0,9937	0,9939	0,9940	0,9942	0,9944	0,9946	0,9947
2,8	0,9949	0,9950	0,9952	0,9954	0,9955	0,9956	0,9958	0,9959	0,9960	0,9962
2,9	0,9963	0,9964	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972
	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
3	0,9973	0,9981	0,9986	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9999	0,9999

Следует также иметь в виду, что функция (3.112) нечетная, поэтому при отрицательном аргументе следует изменять знак функции, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Если m = 0, т.е. центр рассеивания совпадает с началом отсчета по оси x, тогда

$$P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{x_2}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1}{\sigma}\right)\right]. \qquad (3.113)$$

Если m = 0 и заданный интервал относительно начала отсчета симметричен, т.е. $ox_1 = -l$, $ox_2 = l$, тогда

$$P(x_1 < X < x_2) = \Phi\left(\frac{|l|}{\sigma}\right). \qquad (3.114)$$

Пример 3.32

Качество материалов и технология обеспечивают отклонение размеров железобетонной детали от стандарта в пределах среднего квадратического отклонения $\sigma = \pm\ 3$ мм.

Какова вероятность (P) того, что фактически деталь может отличаться от стандарта на $l = \pm\ 1{,}5$ мм?

Решение

По формуле (3.114) с помощью табл. 3.31 находим:

$$P(x_1 < X < x_2) = \Phi\left(\frac{|1{,}5|}{3}\right) = \Phi(0{,}5) = 0{,}38.$$

§ 3. Теория массового обслуживания (теория очередей). Метод Монте-Карло

Теория массового обслуживания и метод статистических испытаний (Монте-Карло), так же как и теория вероятностей и математическая статистика, применяются в тех экономических задачах, в которых решение определяется случайными факторами и обстоятельствами. То есть такими, которые могут принимать различные, заранее не известные значения.

Теория массового обслуживания дает возможность учесть эти случайности в процессах, связанных с потоками требований (заказов, обстоятельств) на обслуживание.

Метод Монте-Карло, или метод статистических испытаний, позволяет искусственно моделировать случайные процессы в тех случаях, когда установление аналитических (т.е. построенных с помощью формул) моделей невозможно или затруднительно.

Теория массового обслуживания (теория очередей)

Многие экономические ситуации связаны с процессами массового обслуживания покупателей-потребителей. Например, в течение ограниченного времени необходимо обслужить покупателей магазинов, клиентов сферы обслуживания, принять заявки на ремонтные работы и выполнить по ним ремонт и т.п.

Обслуживаемые объекты называют каналами или аппаратами обслуживания. Требования (заказы) на обслуживание называют заявками.

Если при поступлении очередной заявки все имеющиеся каналы (аппараты) оказываются занятыми, происходит сбой в обслуживании и начинает образовываться очередь. Поэтому теорию массового обслуживания называют также теорией очередей.

Пример 3.33

(Задача Морза и Кэмпбелла). Дело было во время войны. Сотрудники группы, изучавшей военные операции, в первый же день после прибытия в часть обратили внимание на то, что солдатам приходится долго стоять в очереди к лоханям для мытья и полоскания котелков после еды. Всего стояло четыре лохани: две для мытья и две для полоскания. Эксперт определил по часам, что каждый солдат в среднем употреблял втрое больше времени на мытье, чем на полоскание. Он предложил старшине несколько изменить порядок мытья посуды, после чего очередь к лоханям исчезла.

Что предложил эксперт?

Решение

Эксперт предложил перераспределить лохани: в трех мыть и в одной полоскать.

Теория массового обслуживания ставит своей задачей организовать обслуживание таким образом, чтобы длина очереди была минимальной, а время прохождения заявки – оптимальным. При этом должно обеспечиваться минимальное время простоя помещений, оборудования и персонала системы обслуживания и ее максимальная возможная загрузка.

Для решения названных задач необходимо уметь рассчитывать следующие показатели системы обслуживания:

1. Вероятность того, что в любой момент времени все каналы (аппараты) окажутся свободными:

$$P_c = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}}, \tag{3.115}$$

где k – количество занятых каналов,

n – общее число каналов обслуживания,

$$a = \lambda t_0, \tag{3.116}$$

λ – среднеожидаемое количество заявок на обслуживание в единицу времени (так называемая плотность потока заявок),

t_0 – среднее время обслуживания одной заявки.

2. Среднеожидаемое число свободных каналов:

$$N_c = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) P_n, \tag{3.117}$$

где P_n – вероятность того, что все каналы будут заняты:

$$P_n = P_c \cdot \frac{a^n}{n!}. \tag{3.118}$$

3. Вероятность того, что в любой момент времени все каналы окажутся занятыми:

$$P_з = P_c \cdot \frac{a^n}{n!}. \tag{3.119}$$

4. Среднеожидаемое число занятых каналов:

$$N_з = \sum_{k=1}^{n} k P_k. \tag{3.120}$$

5. Коэффициент простоя каналов:

$$K_п = \frac{N_c}{n}. \tag{3.121}$$

6. Доля загрузки каналов (за время обслуживания):

$$K_з = \frac{N_з}{n}. \tag{3.122}$$

7. Вероятность того, что k каналов заняты:

$$P_k = \frac{\frac{a_k}{k!}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{a^n}{k!}}. \qquad (3.123)$$

Пример 3.34

Торговое предприятие, обслуживающее покупателей по телефонным заказам, располагает пятью операторами с телефонами для приема заявок (n = 5 операторов). Заказы на товары поступают в случайные моменты времени независимо друг от друга, в среднем по два заказа в минуту (λ = 2 заказа). Среднее время обслуживания покупателя составляет одну минуту ($t_0 = 1$).

Необходимо рассчитать: 1) Вероятность того, что в любой момент времени все операторы окажутся свободными (P_c). 2) Среднеожидаемое число свободных операторов (N_c). 3) Вероятность того, что у позвонившего покупателя некому будет принять заказ, так как все операторы окажутся занятыми ($P_з$). 4) Среднеожидаемое число занятых операторов ($N_з$). 5) Коэффициент простоя операторов за время обслуживания ($K_п$). 6) Долю загруженных операторов за время обслуживания ($K_з$).

Решение

Вначале рассчитаем $a = \lambda \cdot t_0 = 2 \cdot 1 = 2$ заказа.

1) Вероятность того, что в любой момент все операторы окажутся свободными, находится по формуле (3.115):

$$P_c = \frac{1}{\frac{a^0}{0!}+\frac{a^1}{1!}+\frac{a^2}{2!}+\frac{a^3}{3!}+\frac{a^4}{4!}+\frac{a^5}{5!}} = \frac{1}{1+2+\frac{4}{2}+\frac{8}{6}+\frac{16}{24}+\frac{32}{120}} =$$

$$= \frac{1}{1+2+2+1\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{4}{15}} = \frac{1}{7{,}27} = 0{,}138.$$

2) Среднеожидаемое число свободных операторов рассчитывается по формуле (3.117), где P_n находится по формуле (3.118) для n = 5:

$$P_n = 0{,}138 \cdot \frac{2^5}{5!} = 0{,}138 \cdot \frac{32}{120} = 0{,}037 \text{ операторов.}$$

Для пользования формулами (3.117)–(3.119) произведем ряд вспомогательных расчетов, которые сведем в табл. 3.32.

Таблица 3.32

Вспомогательные расчеты

Число каналов (k)	$\frac{a^k}{k!}$	P_k	kP_k	$(n-k)P_k$
0	–	0,138	0,0	0,688
1	2,0	0,275	0,275	1,101
2	2,0	0,275	0,550	0,826
3	1,333	0,183	0,549	0,367
4	0,667	0,092	0,368	0,092
5	0,267	0,037	0,185	0,0
Сумма		1,000	1,927	3,074

3) Вероятность того, что в любой момент времени некому будет принять заказ, рассчитывается по формуле (3.119):

$$P_з = 0{,}138 \cdot \frac{2^5}{5!} = 0{,}037.$$

4) Среднеожидаемое число занятых в любое время операторов рассчитывается по формуле (3.120):

$$N_з = \sum_{k=1}^{5} kP_k = 1{,}927 \approx 2 \text{ оператора}.$$

5) Коэффициент простоя операторов рассчитывается по формуле (3.121):

$$K_п = \frac{3{,}074}{5} = 0{,}615 \approx 0{,}6.$$

6) Доля загрузки операторов рассчитывается по формуле (3.122):

$$K_з = \frac{1{,}927}{5} = 0{,}386 \approx 0{,}4.$$

Метод Монте-Карло (метод статистических испытаний)

При принятии экономических решений в ситуациях, зависящих от случайных факторов, часто оказывается невозможным установить необходимые аналитические (т.е. формульные) зависимости между различными экономическими показателями. В этих случаях приходится прибегать к искусственному воссозданию случайных процессов, подобных тем, которые имеют место на практике и могут быть благодаря такому моделированию легко исследованы. Описанный прием получил название метода статистического моделирования или статистических испытаний (а также метода Монте-Карло – по названию места нахождения знаменитого казино).

Пример 3.35

Занявшись бизнесом, хозяин малого предприятия может через год оказаться в одном из следующих состояний, каждое из которых имеет определенную, полученную с помощью статистики, вероятность:

Состояние A_1 – стабильное получение запланированной прибыли – вероятность $P_1 = 0,4$; A_2 – получение прибыли в два и менее раза меньше запланированной – $P_2 = 0,3$; A_3 – получение прибыли в два и более раза больше запланированной – $P_3 = 0,1$; A_4 – банкротство – $P_4 = 0,2$.

Необходимо определить, в каком состоянии конкретно окажется предприниматель к концу года.

Решение

Организуется процедура так называемого единичного жребия. Чтобы сделать ее наглядной, вероятности всех возможных состояний (P_i), образующие полную группу событий (т.е. таких, сумма вероятностей которых равна единице), располагают на координатной оси так, как показано на рис. 3.11.

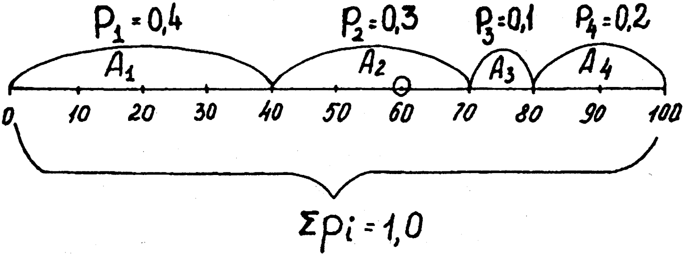

Рис. 3.11

Производится так называемый розыгрыш, состоящий из четырех испытаний (по числу интересующих нас событий). Розыгрыш может производиться различными способами с помощью так называемого механизма случайного выбора. Таким механизмом может служить монета, игральная кость, фишки лото, секундная стрелка и т.п.

При использовании лото в каждом испытании случайным образом выбирается одна из ста нумерованных от 1 до 100 фишек. Допустим, вышла фишка с номером 60. Из рис. 3.11 ясно, что цифра 60 находится на участке события A_2, соответствующего получению прибыли в два раза меньшей, чем запланированная. Это и есть искомое ожидаемое состояние предприятия через год.

Вместо лото можно воспользоваться секундной стрелкой обычных ручных часов: если при взгляде в случайный момент времени на часы секундная стрелка оказывается, скажем, на цифре 30, это соответствует вероятности $^{30}/_{60} = 0,5$, а на цифре 20 – вероятности $^{20}/_{60} = 0,33$, и т.д.

§ 4. Теории игр и статистических решений

Теории игр и статистических решений относятся к так называемым игровым методам исследования операций. Эти методы предназначены для обоснования решений в условиях неопределенности.

Неопределенность означает неполноту, неясность тех данных, на основе которых должно приниматься решение.

Игровые методы дают возможность выработать наилучшую в данных условиях обстановки линию поведения, совокупность правил, руководствуясь которыми можно обеспечить себе максимально возможный средний выигрыш.

В тех случаях, когда неопределенность обстановки вызвана сознательными злонамеренными действиями сторон, применяется аппарат теории игр.

В тех случаях, когда неопределенность обстановки вызвана объективными обстоятельствами, которые либо неизвестны, либо носят случайный характер, применяется аппарат теории статистических решений.

Теория игр

Теория игр служит для выработки рекомендаций по рациональному образу действий в условиях конфликтных ситуаций.

Под *конфликтными ситуациями* понимаются такие, в которых сталкиваются две или более стороны, преследующие различные цели. Причем результат любого действия каждой из сторон зависит от того, какой образ действий выберет "противник". Поскольку в конфликтных ситуациях мы, как правило, не располагаем достаточными сведениями о том, что задумал "противник", решение методами теории игр принимается в условиях неопределенности.

Под *игрой* понимаются мероприятия, состоящие из ряда действий сторон. Если в конфликте участвуют две стороны, игра называется *парной*, если более двух – *множественной*.

Система условий, регламентирующая возможные варианты действий сторон, объем информации каждой стороны о поведении другой, а также результат, к которому приводит данная совокупность действий, составляют *правила игры*.

Игра состоит из ряда последовательных этапов или ходов, причем под *ходом* понимается выбор одного из предусмотренных правилами игры действий.

Совокупность правил, определяющих выбор варианта действий при каждом ходе в зависимости от сложившейся обстановки, называется *стратегией*.

Результатом игры является выигрыш или проигрыш одной из сторон, обычно выражаемый в количественной форме. Например, математическое ожидание дохода или прибыли.

Оптимальной стратегией является такая, которая при многократном повторении игры обеспечивает данной стороне максимально возможный средний выигрыш.

Игры, в которых одна сторона проигрывает столько, сколько выигрывает другая, называются *играми с нулевой суммой*. Здесь будут рассматриваться только парные игры с нулевой суммой.

В общем виде постановка задачи теории игр производится следующим образом:

– имеется некоторая операция (целенаправленное действие), в которой участвуют две стороны А и В с противоположными интересами;

– имеются правила игры, регламентирующие результаты, к которым приводят возможные варианты действий сторон;

– результаты действий сторон (выигрыши) выражены в количественной форме и обозначены a_{ij} (математическое ожидание выигрыша стороны А, сделавшей свой i-й ход при j-м ходе стороны В).

Условие игры обычно записывается в форме платежной матрицы, или *матрицы игры* (табл. 3.33).

Таблица 3.33

Матрица игры

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	...	B_n	α_i
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	α_1
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	α_2
...	...	...	...	...	...
A_i	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	α_m

В данной игре сторона А (мы) имеет m стратегий, а сторона В (противник) – n стратегий (игра $m \times n$).

Необходимо найти наилучшие (оптимальные) стратегии сторон, а также ожидаемый средний выигрыш (результат).

При решении игры встречаются следующие понятия:

$\alpha = \max \alpha_i = \max \min a_{ij}$ – *максимин*, или нижняя цена игры;

$\beta = \min \beta_i = \min \max a_{ij}$ – *минимакс*, или верхняя цена игры.

Получение максимина и минимакса ясно из рассмотрения матрицы игры (табл. 3.33 и 3.34).

В тех случаях, когда $\alpha = \beta$, игра имеет *седловую точку* – элемент матрицы, являющийся одновременно минимальным в своей строке и максимальным в своем столбце.

Общее значение *нижней* и *верхней цены игры* $\alpha = \beta = v$ называется *чистой ценой игры*.

Седловой точке соответствует пара стратегий сторон (стратегии A_i и B_j), которые являются оптимальными. Совокупность этих стратегий называется решением игры в чистых стратегиях.

В тех случаях, когда $\alpha \neq \beta$, решение находится в смешанных стратегиях. *Смешанными стратегиями* называются такие, которые получаются путем случайного чередования чистых стратегий.

Смешанная стратегия стороны А обозначается

$$S^*_A(p_1, p_2, ..., p_m),$$

где $p_1, p_2, ..., p_m$ – вероятности, с которыми применяются стратегии $A_1, A_2, ..., A_m$.

Причем $p_1 + p_2 + p_m = 1$. Аналогично для стороны В:

$$S^*_B(q_1, q_2, ..., q_n),$$

где $q_1 + q_2 + ... + q_n = 1$.

Решением игры в смешанных стратегиях будет пара оптимальных смешанных стратегий, обозначенных S^*_A и S^*_B. Выигрыш, соответствующий этому решению, называется ценой игры ν.

Применительно к играм 2×2:

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}; \tag{3.124}$$

$$p_2 = 1 - p_1; \tag{3.125}$$

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}; \tag{3.126}$$

$$q_2 = 1 - q_1; \tag{3.127}$$

$$\left.\begin{aligned} S^*_A &= (p_1,\ p_2); \\ S^*_B &= (q_1,\ q_2). \end{aligned}\right\} \tag{3.128}$$

Стратегии, входящие в оптимальную стратегию с вероятностями, отличными от нуля, называются *активными*.

$$\nu = \frac{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \tag{3.129}$$

Игра 2×2 имеет следующее геометрическое решение (рис. 3.12):

– на отрезке оси абсцисс, длина которого равна единице, левый конец участка ($x = 0$) обозначает стратегию A_1, а правый ($x = 1$) – стратегию A_2; промежуточные точки участка изображают смешанные стратегии стороны А;

– через точки A_1 и A_2 проводятся перпендикуляры к оси абсцисс: оси I–I и II–II. На оси I–I откладываются выигрыши при стратегии A_1, а на оси II–II – выигрыши при стратегии A_2;

– стратегия противника B_1 дает на осях I–I и II–II точки с координатами a_{11} и a_{12} соответственно, а стратегия B_2 – точки с координатами a_{12} и a_{22} соответственно;

– ордината точки N пересечения стратегий B_1 и B_2 дает величину выигрыша ν – цену игры. Абсцисса точки N дает вероятности обеих стратегий p_1 и p_2, которые равны расстояниям от точки S^* до правого и левого конца отрезка A_1A_2 соответственно.

Нижняя (гарантированная) граница выигрыша выделена на рис. 3.12 жирной линией.

На рис. 3.13 показано аналогичное построение для игры 2×3.

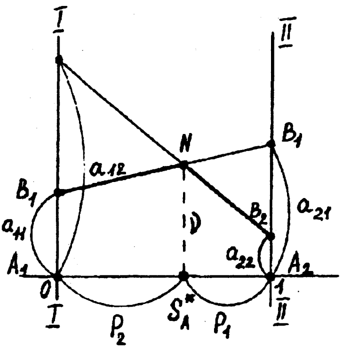

Рис. 3.12. Геометрическое решение игры 2×2

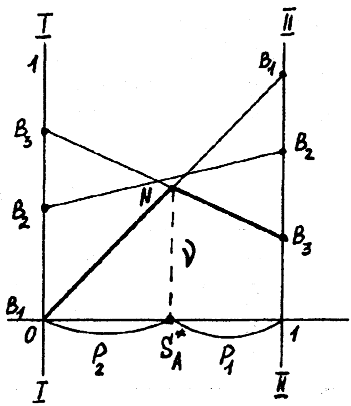

Рис. 3.13. Геометрическое решение игры 2×3

Типовые задачи, решаемые с помощью теории игр, приведены ниже.

Пример 3.36

Предприниматель располагает тремя видами товаров A_1, A_2, A_3, которые он стремится реализовать на рынке, где возможна продажа конкурентом аналогичных товаров – B_1, B_2, B_3 соответственно.

Предпринимателю не известно, какой вид товаров преимущественно конкурент будет продавать на рынке, а конкуренту не известно, какие товары предпринимателя на этом рынке появятся.

Предприниматель располагает данными о том, какова вероятность продать тот или иной товар при наличии на рынке товаров конкурента. Эти данные образуют матрицу игры (табл. 3.34).

Необходимо дать предпринимателю рекомендации по рациональному выбору вида товаров для продвижения их на рынок в условиях конкуренции, при котором обеспечивается получение наилучшего возможного результата – наибольшей вероятности продаж, что бы ни предпринимал конкурент.

Решение

Выписываем справа минимумы строк и из них выбираем наибольший $\alpha_1 = 0{,}4$ (отмечен звездочкой). Это нижняя цена игры, или максимин. Затем выписываем внизу максимумы столбцов и из них выбираем наименьший $\beta_1 = 0{,}8$ (отмечен звездочкой). Это верхняя цена игры, или минимакс.

Таблица 3.34

Матрица игры (пример 3.36)

Предприниматель	Конкурент			
	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	0,5	0,4	0,9	0,4*
A_2	0,2	0,9	0,1	0,1
A_3	0,8	0,0	1,0	0,0
β_i	0,8*	0,9	1,0	

Решение заключается в том, что необходимо систематически применять максиминную стратегию – товар типа A_1. При этом предпринимателю гарантируется результат не менее $p = 0{,}4$, что бы ни предпринимал конкурент (его замыслы нам не известны). Для конкурента наилучшая стратегия – выбор товара вида B_1; при этом он гарантирует себе результат не более $p = 0{,}8$ (чем прибыль предпринимателя больше, тем для него хуже).

Поскольку в рассмотренном примере нет седловой точки ($\alpha \neq \beta$), это означает, что полученные рекомендации верны лишь для случая, когда конкурент не располагает данными об избранном предпринимателем решении. Это так называемая неустойчивая стратегия. Если конкурент узнает о том, что предприниматель стал применять товар типа A_2, он сразу же начнет применять товар вида B_3 и тем самым улучшит свой результат до $p = 0{,}1$.

В тех случаях, когда в подобной задаче конкурент располагает данными о выборе предпринимателя, необходимо искать решение в смешанных стратегиях.

Пример 3.37

В условиях примера 3.36 предпринимателю стали известны возможные количества единиц каждого из его товаров, которые могут быть проданы при различных вариантах появления товаров конкурента на рынке (табл. 3.35).

Необходимо дать предпринимателю рекомендации, при использовании которых среднеожидаемое количество проданных товаров будет наибольшим, что бы ни предпринимал конкурент.

Таблица 3.35

Матрица игры (пример 3.37)

Предприниматель	Конкурент			
	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	5	6	8	5
A_2	8	7	7	7^*
A_3	9	7	6	6
β_j	9	7^*	8	

Решение

Выписываем справа минимумы строк и из них выбираем наибольший $\alpha_2 = 7$ (отмечен звездочкой). Это нижняя цена игры, или максимин. Затем выписываем внизу максимумы столбцов и из них выбираем наименьший $\beta_2 = 7$ (отмечен звездочкой). Это верхняя цена игры, или минимакс.

Решение заключается в том, что необходимо систематически применять свою оптимальную стратегию – товар A_2. При этом гарантируется результат не менее M = 7, что бы ни предпринимал конкурент (его замыслы нам не известны). Для конкурента оптимальная стратегия – выбор товара B_2; при этом он гарантирует себе результат не более M = 7 (чем результат предпринимателя больше, тем для него хуже).

Цена игры $v = \alpha = \beta$ соответствует седловой точке (обведена кружком).

То, что в рассмотренном примере есть седловая точка ($\alpha = \beta$), означает, что полученные рекомендации верны независимо от того, располагает конкурент данными об избранном решении или нет.

Это так называемая устойчивая стратегия. Если конкурент, узнав, что предприниматель выбрал товар A_2, станет в качестве ответного хода использовать стратегию B_1 или B_2, он только улучшит результат предпринимателя до $M_{21} = 8$ или $M_{23} = 7$ соответственно.

Пример 3.38

Банк заинтересован в покупке акций некоего акционерного общества. Стремясь сделать покупку как можно более выгодной, банк снабжает продавца информацией о реальной стоимости акций, которая может быть как правдивой (A_1), так и заведомо ложной (A_2).

Продавец может как поверить информации (B_1), так и не дать ей веры (B_2).

Условия задачи можно представить в виде игровой матрицы (табл. 3.36), содержащей данные о величине возможной успешности сделки – приросте стоимости по отношению к вложенным средствам.

Таблица 3.36

Матрица игры (пример 3.38)

Банк	Продавец акций		
	B_1	B_2	α_i
A_1	0,608	1,000	0.608*
A_2	1,000	0,440	0,440
β_j	1,000*	1,000*	

Необходимо выбрать такую стратегию банка, при которой результат окажется максимально возможным.

Решение

Выписываем справа минимумы строк и из них выбираем наибольший $\alpha_1 = 0{,}608$ (отмечен звездочкой). Это нижняя цена игры, или максимин. Затем выписываем внизу максимумы столбцов и из них выбираем наименьший $\beta_1 = \beta_2 = 1{,}000$ (отмечены звездочкой). Это верхняя цена игры, или минимакс.

Поскольку игра не имеет седловой точки ($\alpha \neq \beta$), оптимальное решение в чистой стратегии невозможно. Выбор в качестве решения хода A_1, имеющего наибольшую эффективность, как мы видели выше (пример 3.36), дает неустойчивую стратегию, пригодную лишь в случае, если “противник” не располагает данными об избранном нами решении.

Для получения устойчивой стратегии в данных условиях необходимо искать решение в смешанных стратегиях:

– по формуле (3.124) или графически (рис. 3.14)

$$p_1 = \frac{0{,}44 - 1{,}00}{0{,}608 + 0{,}44 - 1{,}00 - 1{,}00} = 0{,}588;$$

– по формуле (3.125)

$$p_2 = 1 - p_1 = 0{,}412,$$

поскольку $a_{12} = a_{21}$, $q_1 = p_1 = 0{,}588$; $q_2 = p_2 = 0{,}412$;

– по формуле (3.129)

$$v = \frac{0{,}44 \cdot 0{,}608 - 1{,}00 \cdot 1{,}00}{0{,}608 + 0{,}44 - 1{,}00 - 1{,}00} = 0{,}769;$$

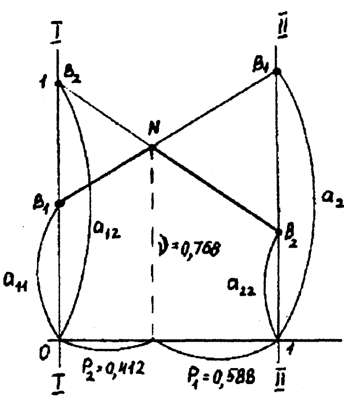

Рис. 3.14. Решение игры в смешанных стратегиях

– по формулам (3.128)

$S^*_A = (0{,}588;\ 0{,}412)$,

$S^*_B = (0{,}588;\ 0{,}412)$.

Решение показывает преимущество (относительную ценность) хода A_1 (58,8 %) по сравнению с ходом A_2 (41,2 %).

Реализация решения в смешанных стратегиях, в тех случаях, когда оно возможно, производится с помощью механизма случайного выбора, как это показано в § 3 гл. 3, с учетом полученных соотношений преимуществ обеих позиций.

Теория статистических решений

Теория статистических решений служит для выработки рекомендаций по рациональному образу действий в условиях неопределенности, вызванной не зависящими ни от нас, ни от конфликтующей стороны причинами.

Этими причинами могут быть наша неосведомленность об условиях ведения операции, а также случайный характер этих условий.

В отличие от теории игр, вместо сознательно и злонамеренно действующей стороны, здесь мы имеем дело с объективными обстоятельствами, которые принято именовать "природой".

Этими обстоятельствами ("природой") могут быть состояние погоды, рыночная конъюнктура, выход из строя техники, стихийные бедствия и другие форс-мажорные причины. Все эти обстоятельства носят случайный характер.

Играми с упомянутой "природой" и занимается теория статистических решений.

Поведение "природы" нам полностью не известно, однако понимается, что она нам сознательно не противодействует.

В общем виде постановка задачи теории статистических решений представляется следующим образом:

имеется m возможных стратегий (линий поведения) – решений: $P_1, P_2, ..., P_m$;

условия обстановки (состояние "природы") точно не известны, однако о них можно сделать n предположений: $O_1, O_2, ..., O_n$ (эти предположения являются как бы стратегиями "природы");

результат, т.е. так называемый выигрыш a_{ij}, при каждой паре стратегии задан таблицей эффективности (табл. 3.37).

Таблица 3.37

Таблица эффективности

P_i	O_j			
	O_1	O_2	...	O_n
P_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
P_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
P_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Выигрыши, указанные в табл. 3.37, являются показателями эффективности решений.

Допустим, необходимо решить некоторую производственную задачу – например, разработать годовой план, план реконструкции предприятия или переход на новый вид продукции.

Обстановка предстоящих действий при этом в значительной мере неопределенна. Так, при годовом планировании может не быть полной ясности о степени и сроках обеспечения плана всеми необходимыми ресурсами; при реконструкции предприятия возникают неясности со сроками ввода в действие объектов, с эффективностью новой техники и технологии в реальных условиях; при переходе на новые виды продукции существует неопределенность в связи с колебаниями спроса, возможностью предложений изделий более высокого уровня качества и т.д.

Предположим, что на промышленном предприятии готовятся к переходу на новые виды продукции – товары народного потребления. При этом возможны четыре решения – P_1, P_2, P_3 и P_4, каждому из которых соответствует определенный вид выпуска или их сочетание. Результаты принятых решений существенно зависят от обстановки: степени обеспеченности производства материальными ресурсами, которая заранее точно не известна и может быть трех вариантов: O_1, O_2, O_3.

Каждой паре сочетаний решений P_i и обстановки O_j соответствует определенный выигрыш a_{ij}, помещаемый в клетки таблицы эффективности на пересечении P_i и O_j (табл. 3.38). Этот выигрыш характеризует относительную величину результата предстоящих действий (прибыль, нормативно-чистую продукцию, издержки производства и т.п.). Из таблицы видно, что при обстановке O_1 решение P_2 в два раза лучше, чем P_3, а решение P_1 неодинаково эффективно для обстановок O_1 и O_3 и т.д.

Необходимо найти такую стратегию (линию поведения) решения P_i, которая по сравнению с другими является наиболее выгодной.

В теории статистических решений применяется специальный показатель риска, который показывает, насколько выгодна применяемая нами стратегия в данной конкретной обстановке с учетом степени ее неопределенности. Риск рассчитывается как разность между ожидаемым результатом действий при наличии точных данных обстановки и результатом, который может быть достигнут, если эти данные неопределенны. Например, при точно известной обстановке O_1 принимают решение P_4, обеспечив себе выигрыш 0,80. Но, поскольку неизвестно, какую обстановку ожидать, можно остановиться и на решении P_1, дающем выигрыш всего 0,25. Тогда величина выигрыша будет соответственно 0,80 – 0,25 = 0,55. Это и есть величина риска. Описанным путем рассчитана таблица риска (табл. 3.39).

Таблица 3.38

Эффективность выпуска новых видов продукции

Варианты решений	Варианты обстановки		
	O_1	O_2	O_3
P_1	0,25	0,35	0,40
P_2	0,70	0,20	0,30
P_3	0,35	0,85	0,20
P_4	0,80	0,10	0,35

Таблица 3.39

Величина риска выпуска новых видов продукции

Варианты решений	Варианты обстановки		
	O_1	O_2	O_3
P_1	0,55	0,50	0,00
P_2	0,10	0,65	0,10
P_3	0,45	0,00	0,20
P_4	0,00	0,75	0,05

Приведенная таблица риска существенно дополняет таблицу эффективности. Так, основываясь только на данных об эффективности, невозможно определить, за счет чего ее можно повысить. Ведь результат зависит не только от избранного решения, но и от условий обстановки. Может оказаться, что при наиболее выгодном способе действий эффективность, например, из-за плохой обеспеченности производства ресурсами будет ниже, чем при невыгодном способе.

Таблица риска свободна от указанного недостатка. Она дает возможность непосредственно оценить качество различных решений и установить, насколько полно реализуются в них существующие возможности достижения успеха при наличии риска. Так, основываясь только на таблице эффективности, можно прийти к выводу, что решение P_1 при обстановке O_2 равноценно решению P_4 при обстановке O_3, ведь эффективность в обоих случаях равна 0,35. Однако анализ указанных решений с помощью таблицы риска показывает, что риск при этом неодинаков и составляет соответственно 0,50 и 0,05. Такая существенная разница объясняется тем, что способ решения P_1 при обстановке O_2 имеет лишь эффективность 0,35, в то время как в этой же обстановке можно получить эффективность до 0,85. Решение P_4 при обстановке O_3 реализует почти всю возможную эффективность: 0,35 из 0,40. Следовательно, решение P_1 при обстановке O_2 значительно (в 10 раз) хуже, чем решение P_4 при обстановке O_3.

Выбор наилучшего решения в условиях неопределенной обстановки существенно зависит от того, какова степень этой неопределенности. В зависимости от этого обычно различают три варианта решений.

Выбор решения, когда вероятности возможных вариантов обстановки известны

В данном случае должно избираться решение, при котором среднее ожидаемое значение выигрыша максимально. Оно находится, по правилам теории вероятностей, как сумма произведений вероятностей различных вариантов обстановки на соответствующие значения выигрышей (см. табл. 3.38).

Выбор решения, когда вероятности возможных вариантов обстановки не известны, но имеются сведения об их относительных значениях

Если считать, что любой из вариантов обстановки не более вероятен, чем другие, то вероятности различных вариантов обстановки можно считать равными и производить выбор решения так же, как это показано выше для случая известных вероятностей. Так, принимая по табл. 3.38 среднюю вероятность каждого варианта обстановки равной 0,33 и находя среднее наибольшее значение результата, получаем в качестве оптимального решение P_3.

Если имеются вероятности различных вариантов обстановки, то иногда их можно расположить в ряд по степени убывания, придав каждой вероятности значение соответствующего члена убывающей арифметической прогрессии. Расчет оптимального решения при этом аналогичен изложенному для первой ситуации. Наконец, вероятности различных вариантов обстановки могут устанавливаться путем опроса компетентных лиц (экспертов). Тогда их искомое значение определится как среднее из нескольких показаний.

Выбор решения, когда вероятности возможных вариантов обстановки не известны, но существуют принципы подхода к оценке результата действий

В данном положении возможны три случая.

Во-первых, может потребоваться гарантия того, что выигрыш в любых условиях окажется не меньше, чем наибольший возможный в худших условиях. Это линия поведения по принципу "рассчитывай на худшее". Оптимальным решением в данном случае будет то, для которого выигрыш окажется максимальным из минимальных при различных вариантах обстановки. Из табл. 3.38 следует, что таким решением является P_1, при котором максимальный риск из минимальных его значений равен 0,25.

Во-вторых, может возникнуть требование избежать большого риска в любых условиях. Здесь оптимальным будет такое решение, для которого риск, максимальный при различных вариантах обстановки, окажется минимальным. Из табл. 3.39 видно, что таким решением является P_3, для которого минимальный риск из максимальных его значений равен 0,45.

В-третьих, может иметь место требование выбрать решение между линией поведения в расчете на худшее и линией поведения в расчете на лучшее. В этом случае оптимальным решением будет то, для которого окажется максимальным показатель G (так называемый критерий пессимизма-оптимизма Гурвица), рассчитываемый по формуле:

$$G = k \min + a_{ij}(1 - k) \max a_{ij}, \qquad (3.130)$$

где a_{ij} – выигрыш, соответствующий i-му решению при j-м варианте обстановки; k – коэффициент, выбираемый между 0 и 1; при k = 0 – линия поведения в расчете на лучшее, при k = 1 – линия поведения в расчете на худшее.

Так, если примем k = 0,50, то на основании формулы (3.130) значение показателя G для способа действий P_1 равно:

$$G = 0{,}50 \cdot 0{,}25 + 0{,}50 \cdot 0{,}40 = 0{,}32.$$

Соответственно для решений P_2, P_3, P_4 при k = 0,5 показатель G имеет значения: G_2 = 0,45, G_3 = 0,52, G_4 = 0,45. Оптимальным решением в данном случае будет P_3, при котором показатель G максимален.

Аналогичным путем могут быть найдены критерии G и оптимальные решения и при других значениях коэффициента k (табл. 3.40).

Таблица 3.40

Критерии пессимизма-оптимизма и оптимальные решения

Решения	k				
	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
P_1	0,40	0,36	0,32	0,29	0,25
P_2	0,70	0,57	0,45	0,33	0,20
P_3	0,85	0,69	0,52	0,36	0,20
P_4	0,80	0,62	0,45	0,28	0,10
Оптимальные решения	P_3	P_3	P_3	P_3	P_2, P_3

Пример 3.39

На промышленном предприятии готовятся к переходу на выпуск новых видов продукции товаров народного потребления. При этом возможны четыре решения P_1, P_2, P_3 и P_4, каждому из которых соответствует определенный вид выпуска продукции или их сочетание. Результаты принятых решений существенно зависят от обстановки (степени обеспеченности производства материальными ресурсами), которая заранее точно не известна и может быть трех видов: O_1, O_2, O_3. Каждому сочетанию решений P и обстановки O соответствует определенный выигрыш a, помещаемый в клетки таблицы эффективности на пересечении P и O (табл. 3.38). Этот выигрыш характеризует относительную вероятность различных вариантов обстановки: $O_1 = 0{,}50$; $O_2 = 0{,}30$; $O_3 = 20$.

Какое решение является оптимальным?

Решение

Наибольшее среднее ожидаемое значение результата даст четвертое решение (P_4): $0{,}50 \cdot 0{,}80 + 0{,}30 \cdot 0{,}10 + 0{,}20 \cdot 0{,}35 = 0{,}50$. Для решения P_1 это значение будет равно 0,31, а для P_2 и P_3 – 0,47. Следовательно, решение P_4 является оптимальным.

Пример 3.40

Вероятность различных вариантов обстановки (табл. 3.38) не известна, и нет основания предпочесть какой-либо ее вариант.

Какое решение является оптимальным?

Решение

Если считать, что любой из вариантов обстановки не более вероятен, чем другие, то вероятности различных вариантов обстановки можно принять равными и производить выбор решения так же, как это сделано в предыдущей задаче (это так называемый принцип недостаточного основания Лапласа), т.е., принимая в табл. 3.38 вероятность каждого варианта обстановки равной 0,33 и находя среднее наибольшее значение результата, получаем в качестве оптимального решения P_3.

Пример 3.41

Вероятность различных вариантов обстановки (табл. 3.38) не известна, но известно, что наиболее вероятна из них O_2, менее вероятна O_1 и еще менее вероятна O_3.

Какое решение является оптимальным?

Решение

Придавая вероятностям различных вариантов обстановки (табл. 3.38) соответствующие значения убывающих членов арифметической прогрессии (2, 3, 1), получим следующие значения для всех вариантов решений:

$P_1 = 0{,}25 \cdot 2 + 0{,}35 \cdot 3 + 0{,}40 \cdot 1 = 1{,}95;$

$P_2 = 0{,}70 \cdot 2 + 0{,}20 \cdot 3 + 0{,}30 \cdot 1 = 2{,}3;$

$P_3 = 0{,}35 \cdot 2 + 0{,}85 \cdot 3 + 0{,}20 \cdot 1 = 3{,}45;$

$P_4 = 0{,}80 \cdot 2 + 0{,}10 \cdot 3 + 0{,}35 \cdot 1 = 2{,}25.$

Оптимальное решение – P_3, соответствующее максимальному среднеожидаемому результату.

Пример 3.42

Вероятность различных вариантов обстановки (табл. 3.38) не известна, но требуется гарантия, что выигрыш в любых условиях окажется не меньше, чем наибольший возможный в худших условиях (принцип “рассчитывай на худшее”).

Решение

Оптимальным решением в данном случае будет то, для которого выигрыш окажется максимальным из минимальных при различных вариантах обстановки (так называемый максиминный критерий Вальда). Из табл. 3.38 следует, что таким решением является P_1, при котором максимальный из минимальных результатов равен 0,25.

Пример 3.43

Вероятность различных вариантов обстановки (табл. 3.38) не известна, но требуется в любых условиях избегать большого риска.

Решение

Здесь оптимальным решением будет то, для которого риск, максимальный при различных вариантах обстановки, окажется минимальным (так называемый критерий минимаксного риска Сэвиджа). Из табл. 3.39 видно, что таким решением является P_3, для которого минимальный из максимальных рисков равен 0,45.

Пример 3.44

Вероятность различных вариантов обстановки (табл. 3.38) не известна, но требуется остановиться между линией поведения “рассчитывай на худшее” и линией поведения “рассчитывай на лучшее”.

Решение

В этом случае оптимальным решением будет то, для которого окажется максимальным показатель G (так называемый критерий пессимизма-оптимизма Гурвица, см. формулу 3.130).

Так, если примем k = 0,50, то значение показателя G для способа действий P_1 будет

$$G_1 = 0{,}50 \cdot 0{,}25 + 0{,}50 \cdot 0{,}40 = 0{,}32.$$

Соответственно для решений P_2, P_3, P_4 при k = 0,5 показатель G имеет значения: $G_2 = 0{,}45$, $G_3 = 0{,}52$, $G_4 = 0{,}45$. Оптимальным решением в данном случае будет P_3, при котором показатель G максимален.

Аналогичным путем могут быть найдены критерии G и оптимальные решения и при других значениях коэффициента k (см. табл. 3.40).

§ 5. Сетевое планирование

Сетевое планирование служит для составления рационального плана решения производственной задачи в кратчайший срок и с минимальными затратами. Методы сетевого планирования дают возможность своевременно оценивать "узкие" места, вносить необходимые коррективы в организацию решения.

Все мероприятия решаемой задачи в их взаимосвязи составляют схему – сетевой график (рис. 3.15), включающий работы и события.

Работа представляет собой выполнение некоторого мероприятия, например определенной технологической, транспортной или складской операции. Работа связана с затратой времени и расходом ресурсов, она должна иметь начало и конец. На графике работа обозначается стрелкой, над которой указывают ее номер (прописная буква с индексом), а под ней – продолжительность (в скобках).

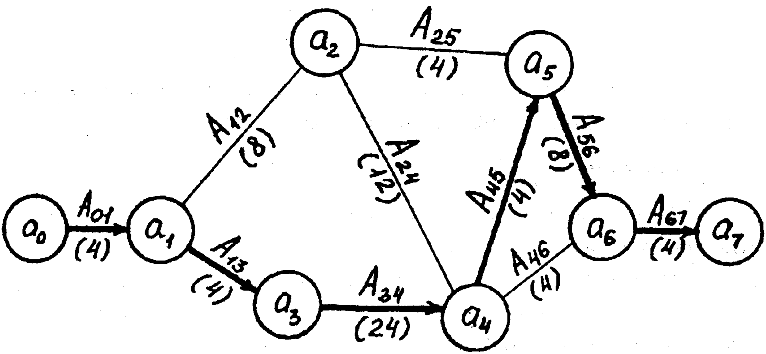

Рис. 3.15

Событиями называются начальные и конечные точки работы, например начало или окончание производственной операции. Событие не является процессом и поэтому не сопровождается затратами времени или ресурсов. На графике событие обозначается кружком с буквенным обозначением внутри (строчная буква с индексом).

Относительно данной работы события могут быть предшествующими (непосредственно перед ней) и последующими (непосредственно за ней). Относительно данной работы другие работы могут быть предшествующими и последующими. Каждая входящая в данное событие работа является предшествующей каждой выходящей работе, каждая выходящая работа – последующей для каждой входящей.

Сетевой график обладает следующими основными свойствами:

ни одно событие не может произойти до тех пор, пока не будут закончены все входящие в него работы;

ни одна работа, выходящая из данного события, не может начаться до тех пор, пока не произойдет данное событие;

ни одна последующая работа не может начаться раньше, чем будут закончены все предшествующие ей работы.

При построении сетевого графика сначала разрабатывают перечень событий, которые определяют планируемый процесс – производственную задачу, без которых она не может состояться. Затем предусматривают работы, в результате которых все необходимые события должны произойти.

Построение сетевого графика рассмотрим на конкретном примере.

Пример 3.45

Заводу поставлена производственная задача – изготовление нового вида продукции. Задача должна решаться двумя цехами (цехи I и II).

Прежде всего в цехах одновременно проводят необходимые подготовительные мероприятия. Затем цехи выполняют первоначальные производственные технологические операции независимо друг от друга. После окончания предварительных технологических операций предусматривается, что цех II продолжает работу, а цех I, прежде чем ее продолжить, передает цеху II часть изготовленных узлов. В цехе II они соединяются с узлами, подготовленными здесь к этому времени. После соединения узлов часть из них передают цеху I, где производятся завершающие работы. Цех II в это время выполняет завершающие работы с оставшимися у него узлами. По завершении работ в цехах изготовленные узлы доставляются к месту сборки и соединяются в готовое изделие.

Решение

На основании схемы выполнения задачи составляют перечень событий (табл. 3.41) и перечень работ (табл. 3.42), необходимых для выпуска новой продукции.

В таблице работ устанавливают время как на производственные, так и на транспортные операции (цехи I и II расположены в отдалении друг от друга).

События, которые не имеют входящих в них работ, называются событиями первого ранга; с них начинается нумерация. Из графика вычеркиваются все работы, выходящие из событий первого ранга, а среди них находятся события, не имеющие входящих работ. Это события второго ранга, которые нумеруются следующими числами, и т.п.

Поскольку в процессе вычеркивания движение осуществляется в направлении стрелок (работ), а сетевой график имеет конечное число событий, никакое предшествующее событие не может получить номер больший, чем любое последующее. Кроме того, всегда находится хотя бы одно событие соответствующего ранга.

Таблица 3.41

Перечень событий планируемой производственной задачи

Обозначение событий	Наименование событий
a_0	Плановый срок начала работы
a_1	Подготовительные мероприятия в цехах окончены
a_2	Выполнены предварительные технологические операции в цехе I
a_3	Выполнены предварительные технологические операции в цехе II
a_4	Выполнены последующие технологические операции в цехе II. Цех II готов к выполнению завершающих операций
a_5	Выполнены последующие технологические операции в цехе I. Цех I готов к выполнению завершающих операций
a_6	Закончены завершающие технологические операции в цехах I и II
a_7	Изделие готово

Таблица 3.42

Перечень работ планируемой производственной задачи

Обозначение работ	Наименование работ	Продолжительность выполнения работы, ч	Предшествующие работы	Последующие работы
A_{01}	Выполнение подготовительных мероприятий в цехах I и II	4	–	A_{12}, A_{13}
A_{12}	Выполнение предварительных технологических операций в цехе I	8	A_{01}	A_{24}, A_{25}
A_{13}	Выполнение предварительных технологических операций в цехе II	4	A_{01}	A_{34}
A_{24}	Передача части изготовленных узлов изделия из цеха I в цех II	12	A_{12}	A_{45}, A_{46}
A_{25}	Выполнение последующих технологических операций в цехе I	4	A_{12}	A_{56}
A_{34}	Выполнение последующих технологических операций в цехе II	24	A_{13}	A_{45}, A_{46}
A_{45}	Передача части изготовленных узлов изделия из цеха II в цех I	4	A_{24}, A_{34}	A_{56}
A_{46}	Выполнение завершающих технологических операций в цехе I	4	A_{24}, A_{34}	A_{67}
A_{56}	Выполнение завершающих технологических операций в цехе II	8	A_{25}, A_{45}	A_{67}
A_{67}	Доставка изготовленных узлов изделия к месту сборки. Сборка и проверка изделия	4	A_{46}, A_{56}	–

Каждая работа кодируется индексом с номерами событий, между которыми она заключена. Совершение события зависит от окончания самой длительной из всех входящих в него работ. Последовательные работы и события формируют пути (цепочки), которые ведут от исходного к завершающему событию. Максимальное число отдельных работ, входящих в какой-либо из путей, ведущих из исходного события в данное, и дает ранг события.

Первый ранг события a_1 показывает, что путь, ведущий в это событие из исходного события a_0, состоит не более чем из одной работы. А событие a_4 будет иметь третий ранг, так как пути, ведущие в него из исходного события a_0, включают три работы: A_{01}, A_{13}, A_{34} или A_{01}, A_{12}, A_{24}.

Сетевой график дает возможность оценить количество и качество мероприятий планируемой производственной задачи. Он позволяет установить, от каких из них и в какой степени зависит достижение конечной цели действий. Так, ранг события показывает, какое количество работ необходимо выполнить, чтобы оно состоялось.

Сетевой график также показывает, какое мероприятие следует выполнять в первую очередь, какие мероприятия можно выполнять параллельно. Так, в рассматриваемом примере ни одна последующая работа не может выполняться раньше, чем закончатся все предшествующие, а работы A_{24} и A_{25} могут выполняться параллельно.

После построения сетевого графика производится его анализ.

Основными параметрами (величинами) сетевого графика являются:

1. Наиболее раннее возможное время наступления j-го события $T_p(j)$, вычисляемое по формуле:

$$T_p(j) = \max_{i \subset j}\left\{T_p(i) + t_{ij}\right\}, \tag{3.131}$$

где символами i и j обозначены номера соответственно предшествующего и последующего событий; t_{ij} – продолжительность (i, j)-й работы; обозначение $i \subset j$ показывает, что событие i предшествует событию j.

2. Самое позднее допустимое время наступления i-го события $T_п(i)$, вычисляемое по формуле:

$$T_п(i) = \min_{i \supset j}\left\{T_п(j) - t_{ij}\right\},$$

где обозначение $i \supset j$ показывает, что событие j предшествует событию i.

3. Резерв времени данного события R_i, вычисляемый по формуле:

$$R_i = T_п(i) - T_p(i).$$

4. Полный резерв времени работы $r_п(i, j)$, вычисляемый по формуле:

$$r_п(ij) = T_п(j) - T_p(i) - t_{ij}.$$

Суть полного резерва времени работы заключается в том, что задержка в выполнении работы (i, j) на величину $\Delta t_{ij} > r_п$ приводит к задержке в наступлении завершающего события на величину $\Delta t_{ij} - r_п(ij)$.

5. Свободный резерв времени работы $r_c(i, j)$, вычисляемый по формуле:

$$r_c(ij) = T_p(j) - T_п(i) - t_{ij}.$$

Суть свободного резерва времени работы заключается в том, что задержка в выполнении работы на величину $\Delta t_{ij} \le r_c(i, j)$ не влияет ни на один другой срок, определенный данным сетевым графиком.

Основными показателями сетевого графика, по которым выполняется его анализ, являются:

1. *Критический путь*, т.е. полный путь, на котором суммарная продолжительность работ является максимальной. Иными словами, это самый длинный по времени путь в сетевом графике от исходного до завершающего события. Критический путь лимитирует выполнение задачи в целом, поэтому любая задержка на работах критического пути увеличивает время всего процесса. События, через которые проходит критический путь в работы, выполняемые не на критических путях, называются ненапряженными. У критических работ как полные, так и свободные резервы времени равны нулю (признак критической работы). Критический путь рассчитывается путем определения работ, полные резервы времени которых равны нулю.

2. *Полный резерв ненапряженного пути*, т.е. резерв времени напряженных событий и работ, находящихся не на критическом пути. В том случае, если ненапряженный и критический пути не пересекаются, полный резерв времени ненапряженного пути равен разности между его длиной и длиной критического пути (во временной мере). Если ненапряженный и критический пути пересекаются, полный резерв времени равен самому длительному участку ненапряженного пути, заключенному между соответствующими парами событий критического пути. Полный резерв времени ненапряженного пути показывает, насколько в сумме может быть увеличена продолжительность всех работ этого пути без изменения срока выполнения задачи в целом.

Анализ сетевого графика позволяет выявлять резервы времени работ, лежащих на ненапряженных путях, которые направляются на работы, выполненные на критическом пути. Этим достигается сокращение времени выполнения критических работ, а значит – и всей задачи в целом.

Критический путь в рассматриваемом примере можно представить как $a_0 \to a_1 \to a_3 \to a_4 \to a_5 \to a_6 \to a_7$.

Длина критического пути (по времени) равна:

$$T_{кр} = t_{0,1} + t_{1,3} + t_{3,4} + t_{4,5} + t_{5,6} + t_{6,7} = 48 \text{ ч.}$$

На рис. 3.15 он показан жирными стрелками.

Ненапряженный путь можно представить как

$$a_0 \to a_1 \to a_2 \to a_4 \to a_6 \to a_7.$$

Поскольку критический и ненапряженный пути пересекаются, полный резерв времени ненапряженного пути будет равен участку ненапряженного пути, заключенному между событиями a_1 и a_4: $t_{1,2} + t_{2,4} = 8 + 12 = 20$ ч.

Проведенный анализ показывает, что сокращение сроков выполнения данной производственной задачи достигается путем перераспределения времени между ненапряженным и критическим путем. Часть ресурсов с ненапряженного пути может быть снята и переведена на критический путь. Тем самым продолжительность критического пути, а значит и время решения задачи в целом, будет сокращена.

3 *Временные оценки работ*. Время выполнения работы может определяться либо по нормативам (статистическим показателям), либо, при отсутствии их, по следующим эмпирическим формулам:

$$\bar{t}_{ij} = \frac{t_{min} + 4t_{нв} + t_{max}}{6}, \tag{3.132}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{t_{max} - t_{min}}{6}, \tag{3.133}$$

где $\bar{t}_{ij}$ – математическое ожидание продолжительности выполнения работы (среднеожидаемое время работы); σ_{ij} – среднеквадратическая ошибка в определении продолжительности работы; t_{min} – продолжительность работы в наиболее благоприятных условиях (оптимистическая оценка); t_{max} – продолжительность работы при самом неблагоприятном стечении обстоятельств (пессимистическая оценка); $t_{нв}$ – продолжительность работы при условии, что не возникает никаких неожиданных трудностей (наиболее вероятная оценка).

Математическое ожидание любого параметра сетевого графика, являющегося суммой величин t_{ij}, равно $\sum \bar{t}_{ij}$. Среднеквадратическая ошибка этого параметра:

$$\sqrt{\sum \sigma_{ij}^2}.$$

Вероятность свершения j-го события в расчетный срок определяется по формуле:

$$P_i = \Phi\left(\frac{T_з - T_р(j)}{\sqrt{\sum \sigma_{ij}^2}}\right), \tag{3.134}$$

где Φ – функция Лапласа; $T_з$ – заданный срок свершения событий; $T_р(j)$ – время раннего свершения j-го события; σ_{ij} – среднеквадратические ошибки в определении продолжительности работ, которые использовались при вычислении раннего срока наступления j-го события.

В соответствии с формулами (3.132) и (3.134) временные оценки работ составят:

например, при t_{min} = 4 ч – $T_з$ =10 ч, t_{max} = 9 ч, $T_р(j)$ = 8 ч, $t_{нв} = 7\,ч - \sum \sigma_{ij}^2 = 25\,ч$;

среднеожидаемое время выполнения работы

$$t_{ij} = \frac{4 + 4 \cdot 7 + 9}{6} = 6{,}84 \text{ ч};$$

среднеквадратическая ошибка в определении продолжительности работы

$$\sigma_{ij} = \frac{9 - 4}{6} = 0{,}83 \text{ ч};$$

вероятность свершения j-го события в расчетный срок (см. табл. 3.31):

$$P_i = \Phi\left(\frac{10 - 8}{25}\right) = \Phi(0{,}4) = 0{,}43.$$

Часть II

ПРАКТИКУМ
(ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ)

ЗАДАЧИ

ГЛАВА 4. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА И ЛОГИКА

(Необходимые пояснения к задачам см. в главе 2)

§ 1. Дроби, доли, пропорции и основные действия арифметики и алгебры

1. Разделить 25 у.д.ед. на две части так, чтобы одна была в 49 раз больше другой.

2. На собрании акционерного общества доля отсутствующих акционеров составляла 20 % от числа присутствующих.

Какой процент от общего числа составляли присутствующие акционеры?

3. При найме менеджера на работу в контракте было указано, что за год ему будет выплачиваться зарплата в размере 500 тыс. у.д.ед. и премия в виде телевизора или другой вещи подобной стоимости, которая выдается авансом в начале года. Менеджер разорвал контракт, проработав 7 месяцев. При увольнении он получил 240 тыс. у.д.ед.

Во сколько у.д.ед. была оценена выданная ему в начале года премия?

4. Фирма А вдвое старше, чем фирма Б. Известно, что когда фирма Б просуществовала 8 лет, фирма А отметила свое 31-летие.

Сколько лет фирмам?

5. Двое партнеров по товариществу, Семенов и Федоров, договорились иметь общий счет в банке, с которого будут снимать в течение каждого месяца определенную постоянную сумму каждый. Рассчитано, что, если счетом станет пользоваться только Семенов, то он исчерпает его за год, а если и Семенов и Федоров – то за 8 месяцев.

За сколько времени израсходовал бы деньги один Федоров?

6. Три компаньона совместно приобрели оборудование на 450 тыс. руб. и собираются использовать его на равных. Причем 1-й компаньон заплатил 230 тыс. руб., 2-й – 220 тыс. руб., а 3-й не заплатил ничего и остался должен компаньонам. Свой долг – 150 тыс. руб. – он им вернул.

Как 1-й и 2-й компаньоны должны разделить эти деньги?

7. На строительство типового здания строительное предприятие № 1 тратит 3 года, предприятие № 2 – 2 года, предприятие № 3 – 4 года, а предприятие № 4 – 1 год.

За сколько времени построят дом четыре строительных предприятия совместно?

8. Бригада № 1 может выстроить промышленный объект за один квартал, а бригада № 2 – за полугодие. Вначале на объекте работала только бригада № 2, а с середины второго месяца к ней присоединилась и бригада № 1.

Сколько времени займет сооружение объекта?

9. Автоцентр сделал заказ автомобилестроительному предприятию на изготовление запасных частей для легковых автомобилей. В частности, была заказана партия комплексных деталей, включающая передние полуоси, диски колес и колесные гайки, общим количеством 52 тыс. единиц. Соотношение названных деталей составляет 2 : 4 : 20.

Сколько и какой процент деталей каждого вида было заказано?

10. Половину рабочего времени менеджер провел в рабочем кабинете, затем он совершал обход предприятия до тех пор, пока не осталась половина того времени, что он работал в кабинете.

Какую часть своего рабочего времени менеджер потратил на обход предприятия?

11. Выгрузку ящиков из железнодорожных вагонов осуществляют две бригады грузчиков, общая оплата труда которых составила 1518 у.д.ед. Первая бригада из 5 человек работала 10 дней; вторая бригада из 7 человек работала 4 дня. Затем бригады объединились и работали еще 5 дней.

Сколько денег заработал каждый рабочий в той и другой бригаде?

12. На предприятие поступил заказ на изготовление 2280 единиц продукции. Эта продукция может быть изготовлена в трех цехах, причем цех № 1 способен выпустить 1000 единиц продукции за 10 дней, цех № 2 – за 25 дней, а цех № 3 – за 20 дней.

1) Какую следует установить величину выпуска для каждого цеха, чтобы заказ был выполнен ими совместно к определенному сроку?

2) Каким должен быть этот срок?

13. Может ли существовать дробь, числитель которой меньше знаменателя, равная дроби, у которой числитель больше знаменателя?

14. На вопрос: "Который час?" – прохожий ответил: "До конца суток остается дважды две пятых того, что уже протекло от начала".

Который теперь час?

15. В результате стихийного бедствия разрушен один из объектов предприятия. Стоимость, с учетом износа, помещений объекта – 10 млн у.д.ед.; стоимость находившегося там оборудования – 80 млн у.д.ед. На объекте находились также материальные ценности, принадлежащие предприятию (сырье, материалы, готовая продукция), стоимостью 50 млн у.д.ед. Затраты на расчистку территории объекта оцениваются в 30 млн у.д.ед. Часть поврежденного имущества может быть реализована за 15 млн у.д.ед. Затраты на восстановление объекта должны составить 60 млн у.д.ед. В связи с выходом из строя объекта предприятие недополучит прибыли в сумме 5 млн у.д.ед.

Необходимо рассчитать прямой, косвенный и общий убыток предприятия от стихийного бедствия.

16. Предприятие заключило договор со страховой фирмой о страховании имущества (кроме транспортных средств) на сумму 200 млн у.д.ед. Кроме того, заключен договор с охранным предприятием об установлении и обслуживании средств сигнализации в помещениях и на территории предприятия на сумму страховки 150 млн у.д.ед. Произошло хищение имущества на сумму 3000 млн у.д.ед. (по оценке страховой компании), в том числе транспортных средств, находившихся на территории предприятия, на сумму 50 млн у.д.ед.

Необходимо рассчитать сумму страхового возмещения, которое должна выплатить страховая компания.

17. Торговец разливным молоком получает товар от двух поставщиков. Каждый поставил одинаковое количество товара, но разного качества. Поэтому и цены разные: дорогое молоко продается по 1 у.д.ед. за 1 литр, а дешевое – за 2 литра.

Продавец решил смешать оба продукта и продавать смесь по 2 у.д.ед. за 3 литра. После того как весь товар был продан, торговец недосчитался 50 у.д.ед., которые он получил бы, если бы продавал молоко, не смешивая.

Сколько продавец потерял и приобрел на каждом виде молока, продавая смесь?

18. Пять лет назад компания А получила доход в шесть раз больше, чем компания Б. С тех пор доходы компаний росли одинаково – по 100 тыс. у.д.ед. в год, и в этом году оказалось, что доход компании А превышает доход компании Б всего в два раза.

Какие доходы у компаний А и Б 1) были пять лет назад; 2) в настоящее время?

19. Грузовой автомобиль с контейнером, содержащим товар, прошел взвешивание, которое показало массу, равную 8 т. Известно, что автомобиль весит на 2 т больше, чем контейнер с товаром, а товар составляет 50 % веса контейнера.

Сколько весит товар?

20. При создании товарищества один из двух учредителей предложил партнеру не складывать капиталы, а перемножать. Он утверждал, что внесет такую сумму, при которой общий капитал, полученный умножением, будет таким же, как и при сложении. В подтверждение он привел такой пример: скажем, каждый учредитель вносит по 2 млн у.д.ед. Сложим ли мы их, или перемножим, в результате все равно будет 4 млн.

Второй партнер, однако, опроверг это предложение: ведь если у одного 3, а у другого 2 млн, то сумма и произведение уже не совпадают.

На это первый партнер заявил, что для любого числа можно найти такое парное второе, при котором их сумма и произведение будут одинаковы. Нужно только уметь находить такую пару.

Так ли это?

21. Железобетонная панель А весит на 200 кг больше, чем две трети веса панели Б. Суммарный же вес обеих панелей соответствует удвоенному весу панели Б.

Сколько весит каждая из панелей?

22. Предприниматели А и Б являются членами товарищества. При этом доля А в складском капитале товарищества на 50 % больше, чем доля Б. Члены товарищества решили принять в свои ряды предпринимателя В, который готов внести свою долю, равную $^1/_3$ существующего складского капитала товарищества, что соответствует 320 тыс. у.д.ед. По согласованию всех трех сторон решено, что в новом товариществе доли участников будут равными, для чего предпринимателям А и Б будет возвращена часть их первоначальных долей на общую сумму, равную взносу предпринимателя В.

Какие суммы должны при этом получить предприниматели А и Б?

23. При разделе собственности между владельцами ликвидирующегося предприятия было решено делить имущество пропорционально доле владельцев в общем капитале.

Как разделить медную проволоку диаметром 50 мм и длиной 2200 м, если капитал владельца А составляет $^3/_8$ капитала владельца Б?

24. Однажды я с интересом наблюдал, как бармен-виртуоз готовит одновременно два коктейля разной крепости из джина с тоником. В руках у него были два сосуда емкостью по 1,3 литра каждый с разными количествами жидкости, которыми он манипулировал, переливая содержимое из сосуда в сосуд. Я стал наблюдать за барменом, запоминая все, что он делает:

1) В первый момент он заполняет сосуд № 1 до отметки 1,1 л тоником, а в сосуд № 2 наливает до 0,5 л джина.

2) Затем переливает из сосуда № 1 во второй сосуд столько тоника, сколько там джина. Взбалтывает.

3) Далее льет из сосуда № 2 в сосуд № 1 столько смеси, сколько жидкости в первом сосуде. Взбалтывает.

4) Наконец, доливает в сосуд № 2 из первого сосуда столько жидкости, сколько жидкости во втором сосуде. Взбалтывает.

После всех этих манипуляций количество жидкости в сосудах уравнивается и в каждом из них образуется коктейль разной крепости.

Каков состав обоих коктейлей?

25. Маркетинговое исследование проводилось среди 4442 потенциальных покупателей зубной пасты. Участники должны были отдать свое предпочтение какому-либо одному из предлагаемых на выбор четырех аналогичных по своим качествам продуктов: пастам “Амбре”, “Зефир”, “Оскал” и “Уста”.

Оказалось, что наибольшим спросом пользуется паста “Амбре”. Остальные виды паст по числу отдавших им предпочтение участников отстали от лидера соответственно: паста “Зефир” – на 15 голосов, паста “Оскал” – на 19 голосов, паста “Уста” – на 24 голоса.

Фирмы – производители паст, проигравших соревнование, опротестовали маркетинговое исследование, ссылаясь на то, что в его итогах не были приведены количества голосов, поданных за продукцию каждой фирмы. Маркетологи, проводившие исследование, на это возразили, что по приведенным данным можно легко установить, сколько покупателей предпочитают ту или иную пасту.

Так ли это?

26. Как 4 автомобиля разделить между тремя совладельцами так, чтобы ни один из них не получил больше, чем остальные?

27. Президент “Корпорации” Семибояров как-то заявил, что является потомственным предпринимателем: его дед, прадед и даже прапрадед всю жизнь занимались торговлей. Друг Семибоярова служащий “Корпорации” Иззагардинер при этом скромно заметил, что хотя он и не такой родовитый, как президент, но его отец и дед тоже имели собственное дело.

Как вы думаете, в ком из друзей больше “предпринимательской крови”?

§ 2. Простые и сложные проценты

28. Ваш капитал вырос в 5 раз. На сколько процентов вы стали богаче?

29. Ваш капитал уменьшился в 5 раз. На сколько процентов вы стали беднее?

30. Ваш капитал вырос на 50 %. Во сколько раз вы стали богаче?

31. Ваш капитал уменьшился на 50 %. Во сколько раз вы стали беднее?

32. Вы хотите получить годовой доход 1 млн руб. при норме процента 5 % годовых.

Какую ссуду вам необходимо взять на год?

33. Вы получили в банке ссуду 300 тыс. руб. при норме процента 10 % годовых.

Каков будет ваш доход?

34. Банк выплачивает своим вкладчикам банковский процент 4 % годовых и дает ссуды заемщикам под 10 % годовых.

Чему равна банковская прибыль от средств вкладчиков в 10 млн руб. при выдаче ссуд заемщикам в 5 млн руб. на 1 год?

35. Предприятие располагает собственным капиталом в 100 млн руб. и берет в банке взаймы под 10 % годовых еще 50 млн руб. Норма прибыли (рентабельность) составляет 30 %.

Чему равен доход предпринимателя?

36. Выручка от реализации продукции (В) = 100 000 у.д.ед.

Материальные затраты (МЗ) = 50 у.д.ед.

Накладные расходы (НР) = 10 000 у.д.ед.

Затраты на зарплату (33) = 10 000 у.д.ед.

Чему равны прибыль (ПР), налог на прибыль (НПР), чистая прибыль (ЧПР)?

37. Вы положили 10 тыс. руб. на срочный вклад при срочной процентной ставке 10 % годовых (с учетом выплаты процентов на проценты).

Сколько денег вы получите через два года?

38. На сколько процентов 25 меньше, чем 50? На сколько процентов 50 больше, чем 25?

39. Цены на товары повысились в 150 раз, а заработная плата увеличилась в 100 раз.

На сколько процентов упала реальная заработная плата?

40. В результате умелого стимулирования 80 % рабочих предприятия стали работать на 25 % производительнее.

На сколько процентов вырос выпуск продукции на предприятии?

41. Продано по курсовой стоимости 1000 акций. Номинал акции 10 тыс. руб. Дивиденд – 15 %. Ссудный процент – 5 % годовых.

Рассчитать: 1) курс акций; 2) учредительскую прибыль.

42. Три работника внесли рационализаторские предложения по экономии ресурсов:

первое экономит 35 % ресурсов;

второе экономит 50 % ресурсов;

третье экономит 15 % ресурсов.

Сколько ресурсов экономят все три предложения?

43. Лабораторный анализ установил, что влажность (процентное содержание воды) сахарного песка равна 15 %. Тонну сахарного песка подвергли сушке, и вес его уменьшился на 80 кг.

Какова теперь влажность высушенной части товара?

44. Сплав золота с серебром содержит 40 % золота.

Сколько нужно добавить килограммов золота к слитку сплава весом в 10 кг, чтобы в образовавшемся новом сплаве золота стало 80 %? (Попытайтесь вначале решить эту задачу на глаз.)

45. Брак на предприятии составляет 5 %. После ряда принятых технико-экономических и организационных мер брак снизился до 1%.

На сколько процентов снизился брак?

46. На собрании трудового коллектива число отсутствующих равнялось 20 % от числа присутствующих. Уход с собрания еще 10 человек привел к тому, что процент отсутствующих вырос до 30.

Сколько всего членов в трудовом коллективе?

47. Предприятие в январе перевыполнило план на 6 %, в феврале и марте – в каждом месяце на столько же процентов по отношению к предыдущим месяцам.

На сколько процентов был перевыполнен среднемесячный план за I квартал?

48. Масса прибыли, направляемая на развитие предприятия (накопление), равна 10 млн руб.; масса прибыли, направляемая на оплату труда (потребление), равна 5 млн руб.

Какова норма накопления?

49. В фирме “Видеопоказ” имеется 40 ежедневно работающих залов для показа видеофильмов.

Какое количество операторов видеопоказа необходимо нанять, чтобы при работе 90 % имеющихся залов каждый оператор имел по одному свободному дню в неделю (7 дней)?

50. Сколько будет 3 % от 3 %?

51. При какой величине процента за кредит получение кредита становится привлекательным для: 1) заемщика, 2) заимодавца, если уровень инфляции составляет 30 % годовых?

52. Предприниматель пользовался банковским кредитом, исходя из 50 % годовых. Величина ссудного процента при этом составляла 10 % годовых.

При каком ожидаемом уровне инфляции в следующем году этот процент за кредит сохранится?

53. Банк предлагает за 50 млн у.д.ед. сберегательный сертификат номиналом 100 млн у.д.ед. на срок 6 месяцев. По истечении этого срока банк выплачивает стоимость сертификата по номиналу.

Какой процент годового дохода дает сертификат? (Проверьте вначале свою интуицию.)

54. В условиях предыдущей задачи через четыре месяца после приобретения у банка сберегательного сертификата предприятие решило его продать.

Какова должна быть продажная цена сертификата, если к моменту продажи процентная ставка составляла 150 % годовых?

55. Акционерное общество выплачивает по акциям дивиденд, равный 30 % годовых. Ссудный процент составляет 10 % годовых.

Каков курс акций?

56. Банк готов приобрести у предприятия за 15 тыс. у.д.ед. вексель номиналом 20 тыс. у.д.ед. за четыре месяца до наступления срока платежа по нему.

Какова учетная ставка данного векселя?

57. Предприятие приобрело на валютной бирже 1000 долларов США по 5500 руб. за 1 доллар. Курс Центрального банка России на день покупки составляет 5600 руб. за доллар.

Чему равна курсовая разница – сумма дохода (или убытка) предприятия от валютной сделки?

58. Что выгоднее: заплатить за учебу в вузе в начале обучения 10 тыс. у.д.ед. или по окончании учебы (через 5 лет) 15 тыс. у.д.ед.?

Процентная ставка (коэффициент дисконтирования) равна 10 % годовых.

59. Предприниматель решил инвестировать в некоторый проект 10 млн у.д.ед. с таким расчетом, чтобы через пять лет получить 15 млн у.д.ед.

Какова при этом должна быть процентная ставка (коэффициент дисконтирования)?

60. Каким должно быть при формировании портфеля акций минимальное количество компаний, акции которых вы приобретаете?

61. Формируя свой пакет акций, на какие результаты следует рассчитывать:

1) какая доля акций (по стоимости) может не дать дохода?

2) какая доля акций (по стоимости) может принести планируемый доход?

3) какая доля акций (по стоимости) может принести доход выше планируемого?

62. Предприниматель планирует ежегодно увеличивать выпуск продукции на 5 %.

Чему будет равен выпуск продукции через 4 года, если сейчас он составляет 30 тыс. единиц?

63. Предприниматель решил выстроить цех, получая финансирование от банка в кредит. Стоимость строительства – 300 млн у.д.ед. Продолжительность строительства – 3 года. Стоимость кредита – 10 % в год. Банк предлагает два варианта финансирования:

1) равномерно – по 100 млн у.д.ед. в год;

2) по нарастающей – в первый год 60, во второй 100 и в третий 140 млн у.д.ед.

Какой вариант финансирования для предпринимателя выгоднее? (Проверьте вначале свою интуицию.)

64. Возможны два варианта решений по инвестированию капитала, равного 100 млн у.д.ед.:

– капитал будет оборачиваться в течение года 11 раз, обеспечивая при каждом обороте рентабельность, равную 15 %;

– капитал будет оборачиваться в течение года 12 раз, обеспечивая при каждом обороте рентабельность, равную 14 %.

Выберите тот из вариантов решения, при котором прибыль окажется больше. (Проверьте вначале свою интуицию.)

65. Предприятие выручило в этом году 150 млн у.д.ед., а в прошлом 50 млн у.д.ед. При этом прирост цен составил 50 % (индекс цен равен 1,5). Необходимо рассчитать:

1) Рост выручки за год без учета изменения цен (индекс стоимости).

2) Рост физического объема реализованной продукции.

3) Рост выручки предприятия по сравнению с прошлым годом в сопоставимых ценах.

66. Предприятие в 1996 г. вложило 100 млн у.д.ед. в проект, связанный с риском, в расчете заработать за год 200 млн у.д.ед. Проект потерпел неудачу и вложенные в него деньги пропали.

Каков убыток предприятия, принимая, что инфляция за 1996 г. составила 50 %?

67. Для расширения производства предприятию требуется кредит в размере 200 млн у.д.ед. на 1 год. Банк выдает кредит под 60 % годовых. Следует также учитывать, что банк потребует обеспечения кредита имуществом предприятия, стоимость которого 300 млн у.д.ед. Эта стоимость должна быть документально подтверждена. Таким подтверждением может быть страховой полис страхования предприятия от непогашения кредита, который потребует страхового взноса в размере 12 % годовых.

В какую сумму обойдется кредит предприятию?

68. Страховая компания страхует сделку купли-продажи товара стоимостью 200 млн у.д.ед. При этом продавец и покупатель страхуются на 50 млн у.д.ед. каждый. Страховой тариф составляет 5 % от суммы страховки на каждого участника.

Какую страховую премию (страховой взнос) получит страховая компания?

69. Производственный объект предприятия стоимостью 200 млн у.д.ед. был застрахован на сумму 100 млн у.д.ед. В результате аварии объекта предприятию нанесен ущерб в размере 60 млн у.д.ед.

Какова должна быть величина страхового возмещения ущерба предприятию страховой компанией при страховании по системе пропорциональной ответственности?

70. Производственное оборудование застраховано на сумму 100 млн у.д.ед. Ущерб от повреждения оборудования равен 60 млн у.д.ед.

Какова должна быть величина страхового возмещения при страховании по системе первого риска?

71. Предприятие страхует некоторое свое имущество стоимостью 100 млн у.д.ед. на всю эту сумму. Страховой тариф (взнос) равен 0,5 % от страховой суммы. Кроме того, страховая фирма (страховщик) дает предприятию скидку за хорошее соблюдение правил безопасности при обращении со страхуемым имуществом в размере 1 % от страхового взноса.

Какова сумма страхового взноса с учетом скидки?

72. Ожидаемый доход предприятия от совершения крупной сделки оценивается в 200 млн у.д.ед. Фактически доход составил

150 млн у.д.ед. Страховая фирма в соответствии с договором о страховании оплачивает страховое возмещение в размере 70 % нанесенного ущерба.

Какое страховое возмещение получит предприятие при страховании по системе предельной ответственности?

73. Спрос на товар составляет несколько тысяч штук в месяц и ежемесячно растет на 6 %.

Сколько потребуется времени, чтобы спрос примерно удвоился, полагая, что существующая тенденция будет продолжаться?

74. Акционерное общество решило выделить для выплаты дивидендов по акциям долю чистой прибыли, равную 10 % общей стоимости акционерного капитала, который равен суммарной стоимости обыкновенных и привилегированных акций. При этом по обыкновенным акциям было решено выплатить 5 % от акционерного капитала, а по привилегированным – 13 %.

Общая стоимость привилегированных акций равна 2500 тыс. у.д.ед., а их количество равно 250 и составляет четверть от всех акций.

Какой дивиденд предполагается выплатить на каждую обыкновенную и привилегированную акцию?

75. Спрос на товар составляет несколько тысяч штук в месяц и непрерывно растет.

Чему должен быть равен этот рост (в процентах),чтобы спрос на товар увеличился за квартал (три месяца) примерно в 3 раза?

76. Универмаг решил довести продажу некоторого товара до 600 штук в день.

Сколько ему для этого примерно понадобится времени, если ежедневное увеличение продаж составляет 35 %, а сейчас он продает в день 100 штук?

77. Оптовая база приобрела у производственного предприятия партию товара по закупочной цене и продала ее магазину розничной продажи по оптовой цене на 20 % выше закупочной. В свою очередь магазин розничной продажи установил розничную цену товара на 30 % выше оптовой. В конце сезона розничная цена была снижена на 10 % и составила 100 у.д.ед. за единицу товара.

Чему равна закупочная цена единицы товара?

78. Розничный торговец продал партию товара в 50 единиц, заработав при этом 40 % по сравнению со стоимостью покупки этого товара. Если бы товар обошелся ему при покупке на 30 % дешевле, а при продаже товара удалось заработать 60 %, то можно было бы снизить цену единицы товара на 800 у.д.ед.

1) За сколько у.д.ед. была продана партия товара и сколько стоит единица товара?

2) Чему равна цена покупки товара?

79. В кафе продается безалкогольный коктейль "Трезвость", состоящий из двух компонентов: напитка "Радость" стоимостью 7 у.д.ед за 1 л и напитка "Сладость" стоимостью 5 у.д.ед. за 1 л. При продаже 50 л коктейля по 8 у.д.ед. за литр кафе зарабатывает 25 % прибыли.

Каков процентный состав коктейля?

80. Торговец недвижимостью получил за две квартиры 264 тыс. у.д.ед. При этом на первой квартире он заработал 20 % прибыли, а на второй понес такой же убыток Общая прибыль при этом составила 10 %.

Какую цену торговец заплатил за квартиру?

§ 3. Уравнения

81. У разорившегося предпринимателя спросили, сколько он имел капитала, когда объявил себя банкротом. Он сказал, что если бы к этому капиталу прибавить миллион рублей, то получилось бы столько, сколько ему нужно было, чтобы не разориться, а если бы прибавить два миллиона, то получилось бы вдвое больше того, что ему нужно было, чтобы не разориться.

Сколько у предпринимателя было капитала, когда он объявил себя банкротом?

82. Как разделить между двумя компаньонами 7 млн руб. так, чтобы у одного оставалось денег ровно на 3 млн руб. больше, чем у другого?

83. В результате износа цена товара снизилась на столько же рублей, на сколько и процентов.

Сколько первоначально стоил товар?

84. Если к акционеру А перейдет от акционера Б количество акций на 1 млн руб., его акционерный капитал станет вдвое больше, чем капитал Б. С другой стороны, если акционер Б увеличит свой акционерный капитал за счет А на 1 млн руб., то стоимость акций А и Б уравняется.

Какими акционерными капиталами обладают А и Б?

85. На собрании акционерного общества отсутствовала $^1/_5$ часть акционеров. После того как пришел один из опоздавших, доля отсутствующих составила $^1/_6$ часть от всех акционеров.

Сколько акционеров в обществе?

86. Предприятие за 10 дней выпускало партию автобусов. После реконструкции предприятия дневной выпуск автобусов увеличился на 1 единицу. В связи с этим на три дня раньше стали выпускать на 4 автобуса больше, чем прежде.

Сколько автобусов в день выпускалось до реконструкции предприятия и после нее?

87. Мешок сахара подмок и увеличил свой вес на 30 %. Затем его сушили до тех пор, пока вес подмоченного товара не уменьшился на 30 %.

Вернулся ли вес товара к первоначальному?

88. Правление акционерного общества решило в двух своих отделениях уравнять ресурсы, общий объем которых составляет 160 млн у.д.ед. Для этого из отделения № 1 в отделение № 2 было передано 2 % ресурсов.

Каким объемом ресурсов располагали отделения до их уравнивания?

89. Акционерное общество израсходовало $^1/_5$ получаемой прибыли на закупку оборудования, $^1/_4$ оставшихся денег потратило на строительство жилья для акционеров, кроме того, 2,5 млн у.д.ед. было израсходовано на выплаты дивидендов по акциям. После всех этих расходов осталась нераспределенной 0,1 часть прибыли.

Чему была равна прибыль акционерного общества?

90. В издательстве "Антарктида" оригинал-макет набора объемом в 4 авт. л. делается за то же время, что 3 авт. л. в издательстве "Тропики".

Какова производительность издательств, если известно, что книгу объемом в 20 авт. л. издательство "Антарктида" сделало на 2 месяца раньше, чем издательство "Тропики"?

91. Автослесарь получил задание на изготовление нескольких комплектов деталей для 8-цилиндровых автомобильных двигателей. Слесарь подсчитал, что если ему удастся поднять производительность труда на 0,1 детали в час, то он сможет выполнить задание на 12 часов раньше нормы, а если еще на 0,5 детали в час, то на целых 36 часов раньше нормы.

Какое задание получил автослесарь (количество деталей на каждый цилиндр)?

92. Знаменитого Пифагора спросили, сколько учеников посещают его беседы. "Половина изучает математику, – ответил Пифагор, – четверть – музыку, остальная часть пребывает в молчании, есть еще три женщины".

Сколько учеников было у Пифагора?

93. Годовой план производства продукции предприятия предусматривает выпуск 25 % продукции в I квартале; увеличение выпуска изделий в полтора раза – во II квартале; план выпуска III квартала – средняя величина от выпуска первых двух; в последнем же квартале необходимо дать 7000 изделий.

Какое количество выпускаемых изделий предусматривает годовой план?

94. Применяя современные методы переработки древесины, комбинат стал изготавливать из 500 м^3 сырья на 25 комплектов мебели больше, чем раньше из 600 м^3. При этом на 3 комплекта мебели теперь идет столько же сырья, сколько раньше на 2.

Сколько сырья расходовалось раньше и стало расходоваться теперь на один комплект мебели?

95. Сколько потеряют в весе 100 кг абрикосов при сушке, если воды в абрикосах 90 %, а в кураге (сухие абрикосы) – в три раза меньше? (Попробуйте вначале решить эту задачу на глаз.)

96. Торговая фирма ежедневно отправляет на свои торговые точки 180 холодильников (поровну на каждую точку). В связи с тем что 4 точки были закрыты, количество холодильников, выделенных на каждую точку, увеличилось на 12 единиц.

1) Сколько торговых точек стало работать в фирме?

2) Сколько холодильников стала получать каждая точка?

97. Некто проиграл игровому автомату половину тех денег, которые были у него в начале игры. При этом у него осталось рублей ровно в два раза меньше, чем вначале было копеек (кстати, копеек оставалось столько, сколько было вначале рублей).

Необходимо рассчитать сумму проигрыша.

98. За время своего существования фирма открыла 9 филиалов – ежегодно по одному. В настоящее время первый филиал старше последнего в 5 раз.

Сколько лет сегодня первому и последнему филиалам?

99. Лента конвейера с расположенными на ней заготовками прибора движется по кольцу. Вдоль конвейера располагаются сборщики, один из которых – головной. Он устанавливает на конвейер заготовки и снимает готовую продукцию. Сборщики (электрики и механики), когда очередная заготовка оказывается перед ними, производят определенные операции. Электрики располагаются слева по кольцу от головного сборщика и составляют $^2/_3$ всех сборщиков; механики – справа по кольцу, их количество соответствует $^3/_8$ всех сборщиков (головной сборщик – механик).

Сколько всего работников на конвейере? Сколько из них электриков и механиков?

100. За аренду помещения фирма платит ежемесячно 6 тыс. у.д.ед. плюс обусловленное количество изготавливаемой фирмой продукции стоимостью 800 у.д.ед. за единицу. При этом 1 м^2 площади помещения обходится фирме в 50 у.д.ед. С удорожанием продукции до 1,2 тыс. у.д.ед. за единицу арендуемая площадь стала обходиться фирме по 60 у.д.ед. за 1 м^2.

1) Какое количество единиц продукции фирмы идет в уплату аренды?

2) Каков размер арендуемого помещения?

101. Предприятия А и Б проводят операции по взаимной закупке производимых ими товаров, рассчитываясь друг с другом путем взаимозачетов. Разница в стоимости закупленных товаров после каждой операции компенсируется из специальных фондов, созданных на предприятиях для этой цели.

К началу первой операции суммы фондов предприятий были одинаковыми. В итоге первой операции предприятие Б отдало в фонд предприятия А 30 тыс. у.д.ед., а в итоге второй операции предприятие А, с учетом этого приобретения, отдало $^3/_4$ своего фонда, имеющегося к этому моменту, предприятию Б. В итоге двух операций у предприятия Б оказалось в фонде средств в 5 раз больше, чем в начальный момент.

Какими начальными фондами обладали предприятия?

102. Арендатор платит муниципалитету за аренду помещений для офисов 40 тыс. у.д.ед. Ему приходится также нести расходы на содержание этих помещений. Сдача офисов предпринимателем в субаренду приносит арендатору 120 тыс. у.д.ед. в месяц. Казалось бы, обеспечивается значительная прибыль. Расчет, однако, показывает, что арендатор остается в накладе: ежемесячные потери составляют половину стоимости аренды или треть стоимости месячного содержания.

Каковы ежемесячные потери арендатора?

103. Проверка постов круглосуточной охраны предприятия проводится в тот момент, когда он составляет сумму четверти времени, прошедшего от начала смены, и половину времени, оставшегося до конца смены. Смена постов охраны осуществляется в полночь.

Когда проводится проверка постов охраны предприятия?

104. Заседание правления фирмы было решено начать после полудня, в тот момент, когда часовая и минутная стрелки часов указывают точно в противоположные направления. Первый и последующие перерывы заседания решили делать, когда направления стрелок также строго противоположны.

1) Когда было начато заседание?

2) Через какое время устраивались перерывы?

105. Рассматривая возможности реорганизации предприятия, менеджер подсчитал, что если увеличить количество равнооплачиваемого персонала на 80 человек, то деньги, выделенные на месячную зарплату (40 тыс. у.д.ед.), будут израсходованы на 5 дней раньше, чем в настоящее время, а если сократить персонал на 100 работников, то зарплаты хватит на 10 дней больше, чем сейчас.

1) Какое количество персонала работает на предприятии в настоящее время?

2) Какова величина месячной (30-дневной) зарплаты персонала в настоящее время?

106. Для работы в нормальном режиме предприятие располагает определенным штатом работников, каждому из которых положена некоторая месячная зарплата в пределах установленного фонда. В период сезонного спада загрузок предприятия 10 рабочих увольняются, и возникает возможность увеличения заработка каждого из оставшихся на 3 тыс. у.д.ед. – в рамках того же фонда зарплаты.

В период роста загрузки предприятия, наоборот, приходится нанимать 50 работников и при этом снижать зарплату каждому работающему на 5 тыс. у.д.ед. – в пределах того же фонда.

1) Какова численность персонала и зарплата при работе в нормальном режиме?

2) Каким фондом зарплаты располагает предприятие?

3) Какова численность персонала и зарплата при работе в период спада и увеличения загрузки предприятия?

107. Предприниматель решил вложить 5 млн у.д.ед. в сопряженные с риском операции А и Б на следующих условиях:

вложение в операцию А больше, чем в операцию Б;

при любом исходе операций вложения теряются;

в случае успеха операции вложение увеличивается в число раз, равное величине вложения.

После успешного проведения обеих операций предприниматель увеличил свой первоначальный капитал в 4 раза.

Чему равны вложения в операции А и Б?

108. Сооружение А в три раза старше, чем сооружение Б; сооружение В в пять раз старше, чем А; сооружение Г – того же возраста, что и Б, но все вместе уступают на десять лет по возрасту сооружению Д, которому сегодня исполнилось 70 лет.

Каков возраст каждого сооружения?

109. Рыболовецкое предприятие рассчитывает приобрести путевки для поездки на престижные курорты Фингалия и Каркодайл, расплатившись за них с туристической фирмой своей продукцией – банками с черной икрой. Однократная поездка на оба курорта суммарно оценивается в 90 банок икры. При этом 6 путевок в Каркодайл стоят столько же, сколько 9 – в Фингалию.

Рыбаки, ведущие переговоры с турфирмой, отобрали некоторое количество путевок на оба курорта. Однако возникла трудная проблема: не все банки с икрой, предназначенные для сделки, оказались реализованными. Возникло два варианта:

– например, можно сделать отобранные в Каркодайл путевки парными (удвоив цену), тогда общее число путевок составит 23, но, к сожалению, и при этом не все банки будут реализованы;

– а вот если сделать парными только отобранные путевки в Фингалию, то общее количество путевок вырастет до 25 и консервы не придется возвращать обратно. Этот вариант был признан приемлемым.

Сколько банок икры было выделено для оплаты путевок?

110. Партия дубленок была куплена за 18 тыс. у.д.ед. В качестве стимулирования покупки фирма-продавец бесплатно передала покупателю еще 6 дубленок. Покупателю сообщили, что с учетом стимулирования покупки теперь каждая дубленка стоит на 150 у.д.ед. дешевле первоначальной продажной цены.

Сколько дубленок было первоначально оплачено и по какой продажной цене?

111. Объем продаж составлял 200 единиц товара в месяц. После снижения цены объем продаж вырос за месяц на 100 единиц и доход составил 600 у.д.ед.

Какова была цена товара до и после снижения, если известно, что спрос на товар растет обратно пропорционально снижению цены?

112. Торговое предприятие при объеме продаж 500 единиц товара в год получает доход в 4 тыс. у.д.ед. Повышение цены на товар привело к сокращению объема продаж на 20 %.

На сколько при этом уменьшился годовой доход, если принять, что сокращение спроса на товар обратно пропорционально росту его цены?

113. С наступлением весны объем продаж определенного предмета одежды при его цене 6 у.д.ед. падает в два раза:

1) До какого уровня можно поднимать при этом цену на данную одежду, чтобы доход не менялся?

2) Каким при этом должен быть объем продаж до его падения?

Будем считать, что падение объема продаж обратно пропорционально росту цены товара.

114. Два компаньона, владеющие фирмой, отправились за рубеж, чтобы приобрести необходимое оборудование и другое имущество для своего предприятия. Для этого они располагали определенной суммой, которую собирались потратить поровну. Фактически суммы затрат каждого оказались различными. Компаньон А закупил станок и грузовую автомашину за 24 тыс. у.д.ед. Компаньон Б закупил станок и легковую автомашину. Легковая автомашина обошлась во столько же, во сколько станок, купленный компаньоном А, а грузовая автомашина на 2 тыс. у.д.ед. дороже станка, купленного компаньоном Б.

Компаньоны подсчитали, что равенство их затрат имело бы место, если бы деньги, фактически потраченные на автомашины, распределились бы так, что легковая автомашина обошлась бы в 3 раза дороже, чем грузовая.

1) Во сколько обошлась каждая покупка?

2) Сколько денег было потрачено каждым компаньоном?

115. В начале торговой операции торговец располагал 238 тыс. у.д.ед. и товаром на 100 тыс. у.д.ед. В процессе торговли он закупил товар еще на 820 тыс. у.д.ед. Всего было продано товара по стоимости, включающей торговую наценку, на 600 тыс. у.д.ед. Торговец должен заплатить определенный процент комиссионных (от стоимости проданного товара) своему агенту по продаже. Известно, что к концу продажи остался нераспроданный товар на сумму 504 тыс. у.д.ед. (по цене, установленной продавцом).

1) Какова была величина торговой наценки?

2) Какую прибыль получил торговец?

3) Какой процент от стоимости проданного товара получил агент по продаже?

116. Фирма приобрела на 30 тыс. у.д.ед. 30 предметов для оборудования своего офиса: некоторое количество компьютеров по 9,5 тыс. за компьютер, радиотелефонов по 500 у.д.ед. за аппарат, офисных столов по 250 у.д.ед. за стол.

Какое количество единиц каждого вида оборудования было приобретено?

117. Семья, состоящая из родителей и детей, собирается приобрести загородный дом с участком земли. Как родители, так и дети располагают для этой цели некоторыми суммами. Дети предложили родителям, чтобы те отдали им $^4/_5$ своей суммы: если их прибавить к "детским" деньгам, можно будет купить дом стоимостью 600 тыс. у.д.ед., а на оставшиеся у родителей деньги приобрести участок земли. В свою очередь родители предложили детям свой вариант: к "родительским" деньгам прибавить $^5/_6$ денег детей, а на оставшиеся у детей средства приобрести тот же участок.

1) Какими суммами располагают родители и дети?

2) Сколько стоит участок земли?

§ 4. Прогрессии и комбинаторика

118. Вам предлагается заключить следующий договор. В течение одного месяца (30 дней) вам будет ежедневно выплачиваться по 100 тыс. руб. На протяжении этого времени вы будете платить в первый день 1 копейку, а в каждый следующий день удваивать то, что платили в предыдущий (т.е. во второй день – 2 коп., в третий – 4 коп. и т.д.).

Согласитесь ли вы на такие условия?

119. Вам предложили сделку:

вы кладете деньги в банк, где они каждый месяц удваиваются (к концу первого месяца их становится в два раза больше, к концу второго – в четыре раза и т.д.);

за это вы платите банку ежемесячно 2400 руб., которые банк изымает из ваших денег после каждого их удвоения.

Выгодна ли для вас эта сделка?

120. По договору работнику в первый день работы выплачивается один рубль, во второй – два, в третий – три и т.д.

Сколько денег он заработает за сто дней? (Попробуйте решить эту задачу устно и быстро.)

121. Участниками акционерного общества закрытого типа являются 5 человек. Из их среды нужно выбрать председателя правления, двух его заместителей и председателя ревизионной комиссии.

Сколькими способами это можно сделать?

122. (Задача Гербалайф). Некая фирма предлагает гражданам высокие постоянные заработки в валюте. Работа очень простая: нужно распространять за доллары чудодейственное лечебное средство. Но не просто продавать. Каждый завербованный распространитель чуда-средства выплачивает фирме определенный вступительный взнос. Затем он должен найти еще несколько себе подобных: их взносы компенсируют его затраты. Все они получают право продажи лекарственного средства на льготных условиях (со скидкой) и зарабатывать при этом заветную валюту.

1) За счет чего делается скидка в цене товара?

2) Кто оплачивает в валюте работу его распространителей?

123. Сколько нужно делений пополам, чтобы разделить арбуз на 4 части? Верно, два. А вот задача посложней. Сколько нужно произвести делений другого шара – на этот раз земного – пополам, чтобы в результате последнего деления размеры половинок соответствовали диаметру атома?

124. У каждого человека обязательно существуют два предка по прямой линии – отец и мать. Значит, одно поколение тому назад любому из живущих сегодня соответствовало 2 человека, два поколения назад – 4 человека (у матери и отца тоже были отцы и матери), три поколения назад – 8 человек и т.д. Приближенно можно считать, что за десять поколений количество предков увеличивается в 1000 раз ($10^3 = 2^{10}$), а за тридцать поколений – в $10^{33} = 10^9$ раз. Но поскольку сегодня на Земле живет свыше 5 млрд человек ($5 \cdot 10^9$), то общее количество предков всех ныне живущих на планете людей тридцать поколений назад должно было составлять, по крайней мере, $10^9 \cdot 5 \cdot 10 = 5 \cdot 10^{18}$ человек. Между тем площадь суши Земли составляет примерно $1{,}5 \cdot 10$ кв. км. Нетрудно сосчитать, что тридцать поколений назад, по нашему расчету, на каждом квадратном километре должно было находиться $5 \cdot 10^{18} : 1{,}5 \cdot 10^8 = 3 \cdot 10^{10}$, т.е. 30 млрд человек – примерно в 6 раз больше, чем сегодня живет на всей Земле. Им просто негде было бы поместиться. Да и историки утверждают, что тридцать поколений назад (это примерно середина I тысячелетия нашей эры) на всей Земле жило не более 300 млн человек, т.е. $3 \cdot 10^8$, – по крайней мере, в 10 раз меньше, чем мы сосчитали.

Какую ошибку в расчетах мы допустили?

§ 5. Функции и графики

125. Малое предприятие способно произвести и реализовать в день:
либо 70 кг вареной и 20 кг копченой колбасы;
либо 60 кг вареной и 45 кг копченой колбасы;
либо 50 кг вареной и 65 кг копченой колбасы;
либо 30 кг вареной и 85 кг копченой колбасы;
либо 10 кг вареной и 92 кг копченой колбасы.

1) Построить график производственных возможностей.

2) С помощью графика производственных возможностей определить степень эффективности бизнеса для следующих заказов на продукцию предприятия:

а) 70 кг вареной и 40 кг копченой колбасы;
б) 55 кг вареной и 55 кг копченой колбасы;
в) 30 кг вареной и 65 кг копченой колбасы.

126. В условиях предыдущей задачи в ситуации эффективного бизнеса (40 кг вареной колбасы и 75 кг копченой колбасы) спрос на вареную колбасу падает на 10 кг (до 30 кг).

На сколько килограммов нужно увеличить производство копченой колбасы (спрос на нее не ограничен), чтобы сохранить эффективный бизнес?

127. Учреждение культуры способно эффективно проводить в год следующее количество мероприятий для молодой и немолодой части населения:
100 для молодых и 980 для немолодых;
300 для молодых и 900 для немолодых;
500 для молодых и 750 для немолодых;
700 для молодых и 550 для немолодых;
900 для молодых и 200 для немолодых.

1) Построить график производственных возможностей.

2) С помощью графика производственных возможностей определить, эффективны, неэффективны и возможны ли следующие сочетания мероприятий:

а) 500 для молодых и 200 для немолодых;
б) 600 для молодых и 650 для немолодых;
в) 600 для молодых и 700 для немолодых.

128. В условиях предыдущей задачи в ситуации эффективного бизнеса проводится 600 мероприятий в год для граждан немолодого возраста.

Сколько можно будет, оставаясь в пределах эффективного бизнеса, провести при этом мероприятий для граждан молодого возраста?

129. В условиях задачи 127 принято решение увеличить количество мероприятий для людей молодого возраста на 100. На сколько при этом придется сократить количество мероприятий для людей немолодого возраста, чтобы остаться в пределах эффективного бизнеса?

130. По данным табл. 4.1 построить математическую модель – график спроса и предложения на мороженое за один день.

С помощью данной модели проследить динамику изменения спроса и предложения на товар и формирование его рыночной цены.

Таблица 4.1

Спрос на мороженое и его предложение

Цена за одну порцию, у.д.ед.	Количество порций мороженого, покупаемых за один день (величина спроса)	Количество порций мороженого, предлагаемых за один день (величина предложения)
600	60	–
650	35	25
700	25	40
750	15	50
800	10	60

131. С помощью графика спроса и предложения (задача 130) показать, как образуются затоваривание и дефицит товаров.

132. По данным табл. 4.2 построить график бюджетной линии. В таблице представлено сочетание товаров А и Б, доступных потребителю с доходом 12 у.д.ед.

Таблица 4.2

Данные для построения бюджетной линии

Количество единиц товара А (цена 1,5 у.д.ед.)	Количество единиц товара Б (цена 1 у.д.ед.)	Суммарный расход на покупку товаров А и Б, у.д.ед.
8	0	12 = 12 + 0 (8·1,5 + 0·1)
6	3	2 = 9 + 3
4	6	2 = 6 + 6
2	9	2 = 3 + 9
0	12	2 = 0 + 12

133. Построить бюджетные линии для доходов в два раза большего и в два раза меньшего, чем рассмотренные выше (табл. 4.3).

Таблица 4.3

Данные для построения бюджетной линии

Величина дохода 24 у.д.ед.			Величина дохода 6 у.д.ед.		
Количество единиц товара А	Количество единиц товара Б	Суммарный расход	Количество единиц товара А	Количество единиц товара Б	Суммарный расход
16	0	24 (16·1,5 + 0·1)	4	0	6 (4·1,5 + 0·1)
12	6	24	3	1,5	6
8	12	24	2	3	6
4	18	24	1	4,5	6
0	24	24	0	6	6

134. Торговой фирме необходимо сделать заказ у предприятия-производителя на поставку одного из видов бытовых приборов. Годовая стоимость заказа Г = 900 млн руб. Стоимость издержек изготовления партии товара С = 10 млн руб. Стоимость издержек хранения товара И = 20 % (0,2).

1) Необходимо найти стоимость оптимальной партии заказа товара ($П_{опт}$) и ее натуральный объем (Об).

2) Построить и проанализировать график для определения оптимальной партии заказа товара.

§ 6. Геометрия

135. На сколько процентов увеличится площадь квадратного садового участка, если его периметр вырастет на 20 %?

136. На сколько процентов увеличится площадь прямоугольного садового участка, если все его стороны вырастут на 40 % каждая?

137. Как изменится площадь прямоугольного садового участка, если его ширину увеличить на 30 %, а длину на столько же процентов уменьшить?

138. (Задача Я.И. Перельмана). Эйфелева башня в Париже сделана целиком из железа и весит около 8 тыс. т. Высота башни 300 м.

Какой высоты должна быть точная копия башни весом в 1 кг? (Попробуйте решить вначале эту задачу на глаз.)

139. Имеются две емкости для горючего из одинаковых материалов, со стенками равной толщины и одинаковой формы. Одна из емкостей в 27 раз вместительнее другой.

Во сколько раз большая емкость тяжелее?

140. Строительный блок весит 6,25 т. Сколько весит блок из того же материала, все размеры которого в 5 раз меньше?

141. Землемер утверждает, что он может разделить участок любой формы двумя взаимно перпендикулярными линиями на 4 равные части.

Возможно ли это?

142. Землевладелец решил сдать в аренду принадлежащую ему землю, разбив ее на участки. Из общей площади земли 30 га, имеющей форму прямоугольника, была выделена часть, также в форме прямоугольника, по всей длине надела земли протяженностью 1000 м и шириной 100 м. Здесь нарезали ряд участков. Вторая часть земли также была поделена на участки, площадь каждого из которых оказалась меньше, чем у одного участка в первой части, на 1 га, а число – на 15 участков больше.

1) Какое количество участков двух видов было нарезано?

2) Какова их площадь?

143. При планировке поселка садоводов 180 домиков (по числу садоводов) решили разместить в нескольких, одинаковых по числу домов линиях. За время строительства число членов садоводческого товарищества выросло до 288 человек. Это потребовало перепланировки: число линий увеличили на 4, а количество домов в каждой – на 3.

Сколько линий домов было в садоводстве?

144. Перед вами два яблока. Первое на 1/4 шире второго, но зато стоит в полтора раза дороже. Какое из них выгоднее покупать? (Качество яблок будем считать одинаковым.)

145. Вам предлагают на выбор яйца двух видов. Длина окружности яйца первого вида 15 см, второго – 18 см. Второе, однако, в полтора раза дороже первого.

Какие яйца выгоднее покупать?

146. Что тяжелее: мешок муки мелкого помола или такой же по объему мешок муки крупного помола?

147. Представьте себе, что перед вами мяч диаметром в 12,5 см, обтянутый по экватору плотно прилегающей к нему веревкой.

На сколько отойдет веревка от поверхности мяча по всей его окружности, если веревку удлинить на 1 м?

Заменим мяч земным шаром (диаметр Земли около 12,5 тыс. км) и также удлиним опоясывающую его по экватору веревку на 1 м.

На сколько отойдет от поверхности шара веревка в этом случае? (Попытайтесь вначале определить это на глаз.)

148. Из улья одновременно вылетели три пчелы. Когда они будут находиться в одной плоскости?

149. У некоего бизнесмена была пара запонок с бриллиантами: в каждой запонке камень весом в 4 карата. Бизнесмен решил обменять эти камни на два натуральных рубина той же стоимости и сделать из них серьги для своей любимой жены.

На рубины каким весом он может рассчитывать?

Примечание. 1) Карат – единица массы, применяемая в ювелирном деле. 1 карат = 0,2 г.

2) Примем стоимость бриллианта весом в 1 карат равной 1000 у.д.ед. С ростом размера этих драгоценных камней их стоимость растет пропорционально квадрату увеличения веса.

3) Примем, что натуральный рубин весом в 1 карат стоит в два раза больше бриллианта такого же веса, а с ростом размера рубина его стоимость растет пропорционально кубу увеличения веса.

150. Арендатор платит собственнику земли 72 тыс. у.д.ед. в год. Арендуемую землю он делит на участки, которые сдает в субаренду по 8 тыс. у.д.ед. за каждый в год. При этом годовой заработок арендатора составляет столько, во сколько ему обошлась аренда площади, равной четырем участкам.

1) Сколько участков сдает арендатор в субаренду?

2) Чему равна прибыль арендатора?

151. Фермер взял в аренду земельный участок в форме параллелограмма. Расстояния между параллельными сторонами (высоты) параллелограмма соответственно равны 400 и 1200 м. Периметр участка равен 4000 м.

Чему равна площадь участка (S)?

§ 7. *Логические задачи и задачи на смекалку*

152. В наследство от бабушки вам досталось 9 золотых монет. В завещании указано, что одна из них фальшивая, отличающаяся от настоящих несколько меньшим весом. Это отличие можно установить лишь с помощью очень точных весов. Стоимость одного взвешивания 100 у.д.ед. Вы можете воспользоваться гирями (вес монет неизвестен) или взвешивать монеты по отношению друг к другу, раскладывая их в любом количестве по двум чашкам весов.

Во сколько может обойтись вам обнаружение фальшивой монеты?

153. Вы с компаньоном собираетесь поровну разделить имущество предприятия. Как это сделать справедливо и не прибегая к посторонней помощи?

154. В семейном предприятии участвуют братья и сестры. У одного из братьев число братьев и сестер одинаково, а у одной из его сестер вдвое меньше сестер, чем братьев.

Сколько в семейном предприятии братьев и сестер?

155. Автомобиль с прицепом стоит 1,5 млн у.д.ед., причем автомобиль дороже прицепа на 1,3 млн у.д.ед.

Сколько стоят автомобиль и прицеп по отдельности? (Попробуйте вначале решить эту задачу на глаз.)

156. В уставном капитале фирмы по учредительному договору доля участника А составляет половину, доля участника Б – одну треть, доля участника В – одну девятую часть. В текущем году было решено всю прибыль израсходовать на покупку для этих участников 17 автомобилей.

Как поделить автомобили между участниками?

157. Два каменщика за два часа выкладывают двухметровую стену.

Сколько каменщиков за 5 часов выложат стену длиной 5 м?

158. Рабочий каждый час отрезает от медного бруса длиной 20 м по куску длиной 2 м.

Сколько времени пройдет, прежде чем весь брус будет израсходован?

159. Как из емкости в 12 л налить ровно 6 л вина в сосуды емкостью 5 и 8 л?

160. Имеется 6 емкостей, 3 из которых пустые, а 3 с жидкостью. Емкости расположены подряд: сначала 3 пустых, затем 3 полных. Требуется сделать так, чтобы пустые и полные емкости чередовались.

Какое минимальное число емкостей нужно опорожнить для этой операции?

161. В бочку с зеленой краской добавили столько желтой краски, сколько было зеленой (по объему). Затем добавили столько зеленой краски, сколько первоначально было желтой (по объему).

Какой процент по объему стал приходиться на зеленую и желтую краски?

162. Золотые коронки для зубов делают из золотых дисков: по одному диску на зуб. Из отходов, получающихся при этом от девяти дисков, можно сделать еще один диск.

Сколько, с учетом этого, можно сделать коронок из 81 диска?

163. На деловой встрече все участники заключили между собой 105 парных договоров – каждый по одному договору.

Сколько было участников совещания? (Попытайтесь вначале решить эту задачу на глаз.)

164. Ежедневно в одно и то же время из Москвы во Владивосток и из Владивостока в Москву уходят железнодорожные составы. Время в пути – ровно неделя. Встречаясь, поездные бригады, едущие в противоположных направлениях, на ходу обмениваются письмами.

Сколько раз за рейс сможет получить письма московская бригада?

165. (Задача Я.И. Перельмана). Автомобиль проехал расстояние между двумя городами со скоростью 60 км/ч и возвратился со скоростью 40 км/ч.

Какова была средняя скорость езды? (Попробуйте вначале решить эту задачу на глаз.)

166. Единица товара весит 150 г.

Сколько будет весить миллион единиц таких товаров?

167. Какие экономические показатели отличаются, а какие – совпадают при торговле продуктами питания, книгами и недвижимостью?

168. На рынке орехи стоят 1000 у.д.ед. за 1 кг, а очищенные орехи – 3000 у.д.ед. за 1 кг.

Какие орехи выгоднее покупать (не считая затрат на очистку орехов), если в 1 кг орехов в среднем содержится 400 г ядер? (Попробуйте вначале решить эту задачу на глаз.)

169. В жаркий день трем товарищам захотелось пить. Они сложились по 10 руб. и купили бутылку лимонада, которая стоила 25 руб. Из полученных 5 руб. сдачи они взяли по 1 руб. каждый, а 2 руб., которые не делились поровну, отдали нищему. Идя домой, они подсчитывали свои расходы: каждый истратил 9 руб. (10 руб. отдал, 1 руб. получил обратно); всего было истрачено $9 \cdot 3 = 27$ руб. Да еще 2 руб. отдали нищему. Итого $27 + 2 = 29$ руб.

Куда подевался 1 руб., ведь всего вначале было 30 руб.?

170. Сколько будет, если 500 руб. разделить на половину.

171. Написать число, состоящее из 11 тысяч, 11 сотен и 11 единиц.

172. Половина моего состояния равна трети вашего.

Кто из нас богаче и во сколько раз?

173. Что больше: 5 % от 70 долларов или 70 % от 5 долларов?

174. Какой знак нужно поставить между 7 и 8, чтобы в результате получилось число больше 7, но меньше 8?

175. Что дороже: полкилограмма двугривенных или килограмм гривенников?

176. Какая общая длина волос на голове у наголо остриженного человека (считая, что длина оставшихся волос равна 1 мм)?

Попытайтесь решить эту задачу на глаз.

177. Сколько времени нужно считать, чтобы дойти от единицы до миллиарда при скорости счета одно число в секунду?

178. Иванов решил построить загородный дом. Строители запросили за работу 1 млн у.д.ед. и собираются построить дом за 1 месяц. Иванов может построить дом и сам, но для этого ему придется взять двухмесячный отпуск за свой счет (месячный заработок составляет 750 тыс. у.д.ед.).

Какой вариант строительства дома выгоднее?

179. Анна, Белла и Вера совместно владеют определенным акционерным капиталом. У Анны умер муж и в дело вошел ее племянник. Белла, также оставшись без мужа, стала вести дела со своим сыном. Вера же вышла замуж и подключила к делу своего мужа. Акционеры решили, что будут делить полученную прибыль между всеми участниками поровну. К концу первого года прибыль составила 44 млн у.д.ед. Налоговой инспекции стало известно, что прибыль каждого участника выражается целым числом миллионов у.д.ед.

Сколько прибыли получил каждый акционер?

180. “Обещаю отдать долг тогда, когда послезавтра станет позавчера и будет так же далеко до ближайшего понедельника, как и в тот день, который будет “сегодня”, когда послезавтра будет вчера”.

1) В какой день недели было дано обещание?

2) Когда будут отданы деньги?

181. При аудиторской проверке фирмы было установлено, что бухгалтер систематически подделывал денежные документы, а затем, чтобы замести следы, вносил путаницу в баланс, переставляя (якобы по ошибке) цифры и заменяя после подписи отдельные числа в итоговых показателях. Так, например, аудитор натолкнулся на такую запись:

$$\begin{array}{r} +\ 9364311 \\ \underline{2487924} \\ 11825545 \end{array}$$

Экспертиза установила, что цифры в обоих слагаемых переставлены, а вторая цифра суммы (она выделена) подчищена и заменена на новую.

Как вы думаете, можно ли на основании приведенной выше фальсифицированной записи установить истинное значение суммы?

182. Страховая компания предложила семье, состоящей из отца, матери и дочери, заключить договор страхования на следующих оригинальных условиях:

– договор заключается в общий день рождения отца и дочери, когда суммарный возраст всех членов семьи составит 46 лет, причем дочь будет в 12 раз младше отца;

– страховая премия должна быть выплачена дочери, когда она станет вдвое младше отца.

Для этого она должна подрасти на столько лет, сколько было матери в момент заключения договора.

1) Сколько было лет каждому члену семьи в момент заключения договора?

2) Когда должна быть выплачена страховая премия?

183. Я поставил свои часы по часам сослуживца и через некоторое время, сверив с ним часы, увидел, что мои часы отстали от его часов ровно на три четверти часа. Сослуживец сказал, что его часы спешат примерно на 12 минут в сутки. Мои же часы, я знал, за то же время отстают примерно в три раза больше.

Сколько времени прошло с момента постановки до сверки часов?

184. Поезд вышел из Санкт-Петербурга в Москву. Одновременно навстречу ему из Москвы выходит поезд, скорость которого в два раза больше, чем у московского.

Какой поезд будет дальше от Санкт-Петербурга в момент встречи?

185. Вор-кладовщик вокзальной камеры хранения, подбирая сочетания двузначных цифр в кодовых замках сданных в камеру чемоданов, заметил, что большинство пассажиров пользуются лишь примерно первой третью из возможной сотни цифр, на которую рассчитаны замки.

Чем вы это можете объяснить?

186. Сколько граней у деревянного бруса, представляющего в сечении прямоугольник?

187. В сравнительной характеристике предприятий было сказано, что предприятие А по своим показателям – одно из первых, а предприятие Б – предпоследнее.

Какое предприятие имеет более высокие показатели?

188. Л.Н. Толстой как-то, то ли в шутку, то ли всерьез, предложил оценивать качество любого человека с помощью дроби, в числителе которой цифра, характеризующая его истинные достоинства (то, что думают о нем окружающие), а в знаменателе – то, что он думает о себе сам. В таком подходе есть определенный смысл: как известно, чем больше числитель, тем дробь больше, а чем больше знаменатель, тем она меньше. И все же этот "показатель Толстого" имеет весьма существенный изъян.

В чем его главный недостаток?

189. Два человека подошли к реке. У берега оказалась одна лодка, вмещающая лишь одного человека.

Как эти люди могут переправиться на лодке на противоположный берег?

190. Какой неопровержимый вывод можно сделать из того факта, что обнаружен конец веревки?

191. На одной улице работают четыре ателье дамской одежды. Хозяин первого рекламирует себя как лучшего портного в городе, хозяин второго – как лучшего в стране, а третьего – в мире.

Какую рекламу вы порекомендовали бы хозяину четвертого ателье?

192. Один из законов Мерфи гласит: “Вероятность того, что бутерброд упадет маслом вниз, прямо пропорциональна стоимости ковра”.

Какое напрашивается следствие из этого закона?

193. Утверждают, что сумма разума на планете – величина постоянная. Почему же тогда в нашей жизни появляется так много неразумного?

194. Что никогда не передается по наследству?

195. Сколько девяток в ряду чисел от 1 до 100?

196. Один из законов Мерфи гласит: “Предоставленные самим себе, события развиваются от плохого к худшему”.

А что же происходит дальше?

197. Сумма долга должна быть возвращена двумя частями по одной части через каждые три месяца.

Сколько нужно времени, чтобы рассчитаться с долгом?

198. Что больше всего способствует новшествам?

199. Каков главный результат благотворительного взноса?

200. Было ли с кем-нибудь из ваших знакомых то же, что и с вами?

201. Что делать, если хочешь жить в согласии?

202. Из американских правил дорожного движения: “Водитель, помни, если ты одной рукой держишь руль, а другой – обнимаешь женщину, то и то и другое...” Что?

203. У моего дяди есть сестра, которая не является моей тетей.

Кто она мне?

ГЛАВА 5. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

(Необходимые пояснения к задачам см. в главе 3)

§ 1. Методы оптимизации: линейное, нелинейное и динамическое программирование (планирование)

204. Представим себе группу из трех станков, каждый из которых может производить два типа деталей, условно А и Б. Производительность каждого из станков по разным типам деталей, как правило, различна: станок № 1 производит в одну минуту 5 деталей А или 5 деталей Б, станок № 2 – 6 деталей А или 2 детали Б, станок № 3 – 5 деталей А или 3 детали Б. При решении задачи необходимо учитывать два ограничения:

1) ни один из станков не должен простаивать;

2) продукция должна быть комплектна: количество произведенных деталей А должно равняться числу деталей Б.

Прежде всего попытаемся получить глазомерное решение задачи. Все расчеты будем производить исходя из общей продолжительности времени работы в 6 ч = 360 мин (одна смена).

На все указанное время загрузим станок № 1 деталями А, а станки № 2 и № 3 – деталями Б. Результат такого решения изобразим следующим образом: слева покажем время загрузки станков по различным деталям, а справа – соответствующее количество произведенной продукции (произведение времени работы на минутную производительность):

Станки	Детали			
	А	Б	А	Б
№ 1	360	0	1800	0
№ 2	0	360	0	720
№ 3	0	360	0	1080

Общее количество выпущенной продукции составит 1800 + 1800 = 3600 деталей. Это решение отвечает поставленным условиям: во-первых, все станки полностью загружены в течение рабочего времени; во-вторых, количество произведенных деталей А в точности равно числу полученных деталей Б.

Однако является ли это решение наилучшим, нельзя ли добиться большей производительности в данных условиях?

205. На предприятии подготовлен резерв для замещения однородных должностей командиров производства (скажем, начальников производственных участков). Руководители предприятия, кадровая служба составили список резерва (в алфавитном порядке) и путем экспертного опроса установили, приближенно конечно, степень соответствия каждого командира каждой из возможных вакансий. Например, установлено, что кандидат А для замещения должности IV подходит примерно в два раза лучше, чем для должности II; для замещения должности I кандидат Б в два раза хуже, чем В, и т.д. Придавая таким характеристикам численную форму, можно составить таблицу соответствия кандидатов различным должностям:

Кандидаты	Должности				
	I	II	III	IV	V
А	10	20	50	40	60*
Б	40*	20	30	10	80
В	80	50*	30	30	70
Г	60	70	20*	10	40
Д	50	70	60	10*	40

Как произвести подбор кандидатов на все должности, чтобы суммарная оценка их качеств оказалась наибольшей? (Попробуйте вначале это сделать на глаз.)

206. Изготовление многих видов современной промышленной продукции начинается с раскроя материала. Выкраивают не только одежду и обувь, но и детали корпуса корабля, кузова автомобиля, фюзеляжа самолета. Раскраивают ткани и кожу, бумагу и стекло, металл и пластмассу. Кроить можно по-разному...

Перед нами листы дефицитного материала размером 6×13 м. Из каждого такого листа необходимо выкроить по несколько заготовок двух видов: заготовки А – размером 5×4 м и заготовки Б – размером 2×3 м. Задача заключается в том, чтобы получить как можно больше заготовок обоих видов с наименьшим количеством отходов. Кроме того, как и в задаче со станками, необходимо обеспечить комплектность заготовок: на 1 заготовку А должно приходиться 5 заготовок Б.

Как вести раскрой? Какое решение принять?

207. В условиях задачи 206 стало возможным из каждого листа раскраивать заготовки любого вида (а не обязательно обоих).

Как это повлияет на план раскроя?

208. На ферме в качестве корма для животных используются два продукта: М и Н. Сбалансированное питание предполагает, что каждое животное должно получать в день не менее 200 калорий, причем потребляемое при этом количество жира не должно превышать 14 единиц. Подсчитано, что в одном килограмме каждого продукта содержится:

в продукте М – 150 калорий и 14 единиц жира;

в продукте Н – 200 калорий и 4 единицы жира.

Как разработать максимально дешевый рацион откорма животных, отвечающий этим условиям, если стоимость 1 кг продукта М составляет 1,5 у.д.ед., а 1 кг продукта Н – 2,5 у.д.ед.?

209. Имеются два производителя товаров (А и Б) и три потребителя товаров (№ 1, № 2 и № 3). Все эти элементы канала распределения действуют независимо. Каждый производитель располагает определенным количеством товара: 60 и 40 (в у.ед.); каждый потребитель готов приобрести определенную часть этого товара: 50, 30, 20 (рис. 5.1). Относительная величина прибыли (эффективность) каждого из производителей при продаже товаров каждому из потребителей показана в таблице, помещенной на рис. 5.1 (в у.ед.).

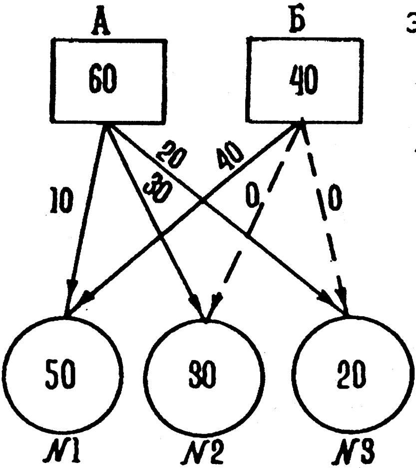

ТАБЛИЦА ЭФФЕКТИВНОСТИ

	№1	№2	№3
А	16	10	8
Б	12	18	6

Рис. 5.1. Горизонтальная организация каналов распределения

При горизонтальной организации каналов распределения товаров каждый из производителей стремится направить свой товар по таким каналам, чтобы обеспечить себе наибольшую прибыль. При этом интересы производителей сталкиваются: один и тот же канал может оказаться привлекательным для обоих производителей, а пропускная способность каждого канала ограничена. В итоге стихийно складывается распределение, один из возможных вариантов которого показан на рис. 5.1. При этом производитель товаров А получает прибыль, равную сумме произведений единиц товара, направляемых каждому из потребителей на соответствующие эффективности.

Прибыль производителя товара А:

$$А = 10 \cdot 16 + 30 \cdot 10 + 20 \cdot 8 = 620.$$

Аналогично для производителя товара Б.

Прибыль производителя товара Б:

$$Б = 40 \cdot 12 + 0 \cdot 18 + 0 \cdot 6 = 480.$$

Производитель товара А оказался в явном выигрыше. Казалось бы, что может быть для него лучше? Не будем, однако, торопиться с выводами.

Необходимо построить вертикальную организацию распределения и сравнить ее эффективность с полученной для горизонтальной организации.

§ 2. Теория вероятностей и математическая статистика

210. Вы располагаете капиталом в 100 млн у.д.ед. и рассматриваете альтернативные возможности вложения его либо в производство кинофильма, либо в торговлю.

Вероятность успеха	в кинофильм	– 0,2
вложения капитала	в торговлю	– 0,7
Вероятность неуспеха	в кинофильм	– 0,8
вложения капитала	в торговлю	– 0,3

В случае успеха	
кинофильм дает	90% прибыли
торговля дает	30% прибыли
В случае неуспеха	
кинофильм дает	10% прибыли
торговля дает	20% прибыли

Куда выгоднее вложить капитал?

211. Вероятность выигрыша на один билет равна 1 %.

Сколько нужно приобрести билетов, чтобы с вероятностью 0,7 хотя бы один (не менее чем один) из них выиграл?

212. По прогнозу на лето в Санкт-Петербурге ожидается 80 % дней с теплой погодой, 80 % дней с пасмурной погодой и 60 % ветреных дней.

Сколько времени (в %) будет одновременно тепло, облачно и ветрено?

213. Ваша фирма собирается приобрести ценный электронный прибор. Прибор может оказаться выпущенным одним из трех заводов, причем заранее не известно, каким именно. Обычно в продажу поступает 60 % приборов с завода № 1, 30 % с завода № 2 и 10 % с завода № 3. Соответственно вероятность того, что прибор проработает весь гарантийный срок без поломки, для различных заводов составляет: для завода № 1 – 0,9, для завода № 2 – 0,8, для завода № 3 – 0,6.

Какова вероятность того, что купленный фирмой прибор проработает весь гарантийный срок без поломки?

214. Какова вероятность совпадения дней рождения (день и месяц) у любых двух людей в группе из сорока человек? (Проверьте вначале свою интуицию.)

215. “Закон парности” – так называют распространенную примету, согласно которой родственные события происходят не по одиночке, а парами: произошло одно – жди вскоре другого. К примеру, если случилась неприятность (болезнь, пропажа, “неуд” по контрольной работе) – повторение не за горами.

Существует ли в действительности подобная закономерность, стоит ли всерьез принимать “закон парности”?

216. Вам, конечно, доводилось слышать пословицу: “Гора с горой не сходится, а человек с человеком всегда сойдутся”? Здесь речь идет о том, что случайная встреча двух людей в огромном мире весьма вероятна.

Так ли это? Стоит ли надеяться, что такая встреча может действительно произойти?

217. “Законы подлости” – так называют пословицы типа: “Все плохое, что может случиться – случается”. Пожалуй, самый популярный из этих “законов” – наш “закон бутерброда”: “Бутерброд всегда падает маслом вниз”. Американский вариант проводит ту же мысль в несколько завуалированной форме: “Нельзя заранее определить, какую сторону бутерброда следует намазать маслом”. Или в более строгой формулировке: “Вероятность того, что бутерброд упадет маслом вниз, прямо пропорциональна стоимости ковра”.

С чем связан явный пессимизм, присущий “законам подлости”? В какой мере эти законы отвечают реалиям жизни?

218. Необходимо выбрать один из двух типов объектов для вложения капитала. Анализ статистической информации инвестирования аналогичных проектов показывает:

При вложении капитала в объекты типа А:
прибыль 15 млн у.д.ед. имела место в 40 случаях,
прибыль 20 млн у.д.ед. имела место в 20 случаях,
прибыль 25 млн у.д.ед. имела место в 15 случаях.

При вложении капитала в объекты типа Б:
прибыль 12 млн у.д.ед. имела место в 60 случаях,
прибыль 16 млн у.д.ед. имела место в 48 случаях,
прибыль 24 млн у.д.ед. имела место в 36 случаях.

Необходимо выбрать тип объектов для вложения капитала, обеспечивающий наибольшую прибыль.

219. Возможно осуществление двух новых проектов, сопряженных с риском. Первый проект сулит получение в течение года прибыли 15 млн у.д.ед. с вероятностью 0,4, но не исключается и убыток 2 млн у.д.ед. (вероятность его равна 1 – 0,4 = 0,6). Второй проект обещает прибыль 10 млн у.д.ед. с вероятностью 0,5; возможный убыток здесь имеет вероятность 0,5 и может составить 8 млн у.д.ед.

Какой проект предпочтительнее с точки зрения ожидаемой прибыли?

220. В условиях предыдущей задачи определить, какой проект предпочтительнее с точки зрения меньшего различия в вероятностях прибылей и убытков (как бы более осторожный)?

221. В условиях задачи 220 определить, какой проект предпочтительнее с точки зрения соотношения изменений вероятностей прибыли и ее величины?

222. В условиях задачи 220 определить, какой проект предпочтительнее с точки зрения соотношения изменений вероятностей убытка и его величин?

223. В условиях задачи 220 определить, какой проект предпочтительнее с точки зрения соотношения возможных сумм прибылей и убытков?

224. Некоторые считают, что билет с шестизначным номером (трамвайный, автобусный и т.д.) приносит счастье, если сумма трех его первых цифр равна сумме трех последних.

Какова вероятность, что полученный вами билет – "счастливый"? Или, иными словами: сколько "счастливых" билетов в среднем приходится на сотню?

225. Одному из руководителей Китая приписывают следующую фразу: "Если все китайцы станут проходить под аркой, то последний в колонне..."

Как вы думаете, когда под аркой окажется последний в колонне? (Сделайте приблизительный расчет.)

§ 3. Теория массового обслуживания (теория очередей). Метод Монте-Карло

226. На прием к директору записалось несколько посетителей. Секретарь директора составил список в алфавитном порядке, указав для каждого требующуюся ему ориентировочную продолжительность приема. Фамилии записавшихся обозначены в списке их заглавными буквами (см. табл.).

№ п/п	Фамилия (начальная буква)	Продолжительность приема, мин	Время ожидания, мин
1	Б	25	0
2	Д	15	25
3	Е	10	40
4	К	5	50
5	С	35	55
6	Т	30	90
Суммарное время		120 мин = 2 ч	260 мин = 4 ч 20 мин

На весь прием директору, как видно из таблицы, отведено 2 ч = 120 мин, поэтому пришлось ограничиться всего шестью посетителями.

Является ли составленное расписание наилучшим?

227. Детали обрабатываются последовательно на двух станках. В таблице показана продолжительность этой обработки для каждой из 10 деталей на двух станках. Нумерация деталей и последовательность их обработки взяты при этом произвольно.

Номера деталей и последовательность их обработки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Продолжительность обработки на станке № 1, мин	7	3	12	14	20	4	2	9	19	6
Продолжительность обработки на станке № 2, мин	18	13	9	5	8	16	20	15	1	13

Расчет показывает, что суммарное время обработки всех деталей составляет 118 мин. Кроме того, существует время ожидания обработки первой поданной детали на станке № 2, равное 7 мин, и время ожидания, пока освободится станок № 2 для обработки детали № 5, равное 11 мин. Итого, обработка всех деталей на двух станках с учетом времени ожидания продолжается 136 мин.

Необходимо найти такое расписание порядка обработки деталей на двух станках, при котором суммарное время обработки будет наименьшим.

228. Для определения интересующей нас вероятности того, что поставляемый вид прибора бытовой техники при включении дает отказы, было произведено $N = 1000$ испытаний прибора, в каждом из которых вероятность отказа составляла $P = 0,3$.

Необходимо найти, какова вероятность того, что полученная вероятность имеет ошибку Δ не более, чем $\varepsilon = 0,02$.

229. Предприятие коммунального обслуживания населения принимает от граждан заявки на ремонт вышедшего из строя оборудования систем жизнеобеспечения квартир: электричества, газа, водопровода, канализации. Среднеожидаемое количество заявок на обслуживание составляет 1 вызов в две минуты, средняя продолжительность приема заявки $t_0 = 2$ мин.

Необходимо рассчитать, какое количество операторов должно работать на приеме заявок на ремонт, чтобы обеспечить вероятность приема каждой заявки более 0,98.

§ 4. Теории игр и статистических решений. Групповые решения

230. Торговый агент должен встретиться с иногородним клиентом и собирается лично вручить ему заказ на 3000 у.д.ед.

Если агент поедет поездом, то потеряет день на работе, который принес бы ему 1500 у.д.ед.

Полет самолетом позволит сократить рабочий день, но если самолет не полетит из-за тумана, то личная встреча с клиентом не состоится и день на работе будет потерян. В этом случае придется говорить с клиентом по телефону, что уменьшит сумму заказа на 500 у.д.ед. Вероятность тумана оценивается как 0,1 (по статистике в это время года 1 день из 10 – с туманом).

Какое решение должен принять агент?

231. Новый прибор, разрабатываемый на одном из предприятий, предлагается оснастить предохранителем. Предохранитель гарантирует сохранность прибора на случай внезапного прекращения подачи электроэнергии. Стоимость предохранителя 50 руб. Стоимость ремонта прибора при выходе его из строя (если не будет предохранителя) – 150 руб.

Стоит ли ставить предохранитель, ведь прекращения подачи электроэнергии может и не произойти? Иными словами, стоит ли идти на риск?

232. Решить предыдущую задачу для случая, когда предохранитель стоит также 50 руб., ремонт – 150 руб., если вероятность аварии равна 0,2, а вероятность безаварийной работы – 0,8.

233. Ваша фирма страхует автомобили граждан от угона на суммы по 5 тыс. руб. за один автомобиль. По статистике вероятность угона автомобиля за год составляет 0,05 %.

Какова должна быть сумма годового страхового взноса, чтобы годовой доход фирмы от страхования составил 1 млн руб.? (Примем, что в год вы страхуете в среднем 100 автомобилей.)

234. В условиях предыдущей задачи рассчитать, какую прибыль получает фирма в год, с учетом затрат и необходимости выплат страховых премий, если на выплату страховых премий фирма расходует в год 250 тыс. руб., а затраты на организацию страховой деятельности составляют в год также 250 тыс. руб.?

235. (По мотивам О'Генри). Энди увидел на противоположной стороне улицы человека, которому так неосмотрительно дал в долг до получки 50 долларов. С тех пор прошло много лет, и вот неожиданная встреча. Энди ринулся бы через дорогу наперерез должнику, но неподалеку маячила массивная фигура полисмена – блюститель порядка поглядывал то вправо, то влево: в этом месте переход улицы воспрещен. Энди быстро соображал. Половина шансов за то, что удастся незаметно перебежать улицу. Но стоит ли бежать? Если полисмен заметит – десять долларов штрафа. А должник тем временем уйдет. Однако и долг неплохо бы получить.

Как быть?

236. Может ли в конкурентной борьбе, в остром конфликте бедный, т.е. обладающий меньшими ресурсами, одолеть богатого, у которого ресурсов существенно больше?

Ответ на этот вопрос можно получить с помощью следующей задачи, моделирующей противостояние слабого и сильного.

Почему великим полководцам удается с малыми силами разбить во много раз превосходящие силы врага?

История неопровержимо свидетельствует: великие полководцы отличались от своих заурядных коллег, в частности, тем, что умели своевременно и верно рисковать.

Великий Полководец (будем для краткости называть его В.П.), силы которого составляют три дивизии, должен во что бы то ни стало прорваться через горный перевал. Задача эта не из легких, ибо перевал обороняют четыре дивизии врага. Правда, во главе их стоит Заурядный Полководец (З.П.). Качество дивизий противников принимается одинаковым.

Перевал имеет два прохода. Условия нашей баталии таковы, что при встрече противоборствующих сторон на проходах перевала побеждает та из них, у которой дивизий на данном проходе больше: она уничтожает противника и оставляет за собой перевал (рис. 5.2).

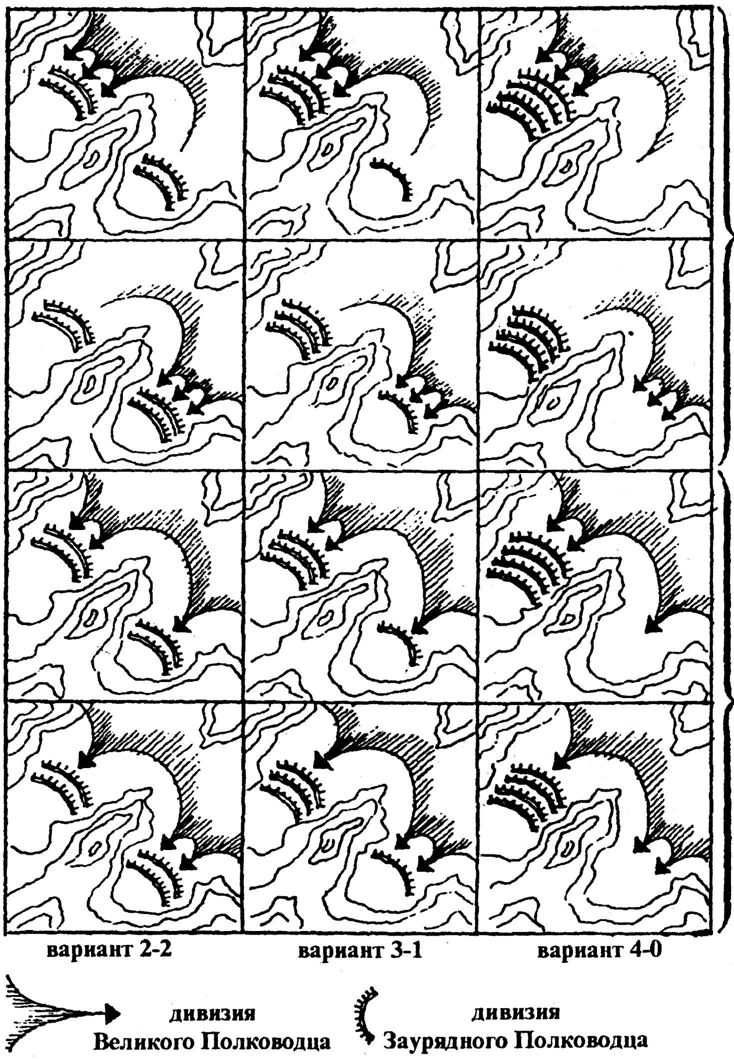

Рис. 5.2

Итак, как слабому победить сильного, бедному ресурсами – богатого?

237. (Задача Вильямса). После напряженного трудового дня вы спешите домой и вдруг внезапно вспоминаете, что у Марины сегодня день рождения. А может быть, нет. Все магазины уже закрыты, но торгуют цветочные лавки. Если ее день рождения не сегодня и вы не принесете подарка, то положение будет нейтральным. Если у нее не день рождения и вы примчитесь с букетом, то максимум, чем вы рискуете, – это подвергнуться проверке на трезвость. Если у нее действительно день рождения и вы вовремя вспомнили об этом, то заслужите благодарность. Если же в этом случае вы не принесете ничего – то вы человек пропащий.

Как вам поступить?

238. Группе из трех равноправных компаньонов необходимо принять общее решение, выбрав его из четырех возможных альтернативных вариантов. Каждое лицо группы по разному оценивает возможные решения. Эта оценка приведена в табл. 5.1 на основе придания решениям различных рангов (так называемая ранжировка). Причем чем ниже ранг, тем предпочтение больше.

Таблица 5.1

Ранжировка альтернатив

Лицо, принимающее решение	Ранги			
	1-й	2-й	3-й	4-й
1-е	a_3	a_4	a_2	a_1
2-е	a_3	a_2	a_1	a_4
3-е	a_1	a_2	a_4	a_3

Необходимо найти оптимальное групповое решение.

239. Группа из трех равноправных компаньонов оценивает три альтернативных решения по трехбалльной системе: лучшее решение – 3 балла, среднее – 2, худшее – 1 балл (табл. 5.2).

Таблица 5.2

Ранжировка альтернатив

Варианты решения	Оценки, в баллах		
	1-е лицо	2-е лицо	3-е лицо
a_1	2	3	1
a_2	1	1	3
a_3	3	2	2

Необходимо найти такое групповое решение, при котором отклонение между предпочтением группы и индивидуальными решениями будет наименьшим.

240. Предположим, решение принимается группой из двух лиц. Возможны два альтернативных варианта решения: a_1 и a_2. Оценки полезности этих вариантов обоими лицами для двух возможных исходов показаны в табл. 5.3 и 5.4. Вероятности исходов для каждого лица, естественно, различны.

Таблица 5.3

Матрица полезности для 1-го лица

Варианты решения	Вероятности исходов		Полезность по двум исходам
	0,4	0,8	
a_1	– 8	+12	$-8 \cdot 10{,}4 + 12 \cdot 0{,}8 = +6{,}4$
a_2	+20	–3	$+20 \cdot 0{,}4 - 3 \cdot 0{,}8 = +5{,}6$

Таблица 5.4

Матрица полезности для 2-го лица

Варианты решения	Вероятности исходов		Полезность по двум исходам
	0,2	0,6	
a_1	–2	+4	$-2 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}6 = 2{,}0$
a_2	+40	–7	$+40 \cdot 0{,}2 - 7 \cdot 0{,}6 = +3{,}8$

Необходимо найти оптимальное групповое решение.

241. Решение принимается двумя равноправными компаньонами. Возможны два альтернативных решения: a_1 и a_2. Оценка полезности этих вариантов обоими компаньонами приведена в табл. 5.5.

Таблица 5.5

Матрица полезности для двух лиц

Варианты решения	1-е лицо			2-е лицо		
	Вероятность исходов		Полезность по двум исходам	Вероятности исходов		Полезность по двум исходам
	0,1	0,9		0,9	0,1	
a_1	8	4	0,8 + 3,6 = 4,4	2	10	1,8 + 1 = 2,8
a_2	0	8	0 + 7,2 = 7,2	6	0	5,4 + 0 = 5,4

Необходимо найти оптимальное групповое решение.

242. Владельцу груза приходится выбирать из двух альтернатив: страховать или не страховать перевозимый груз. Риск заключается в том, что возможна катастрофа с вероятностью 0,1, в результате которой груз будет утрачен. Матрица полезности – табл. 5.6.

Таблица 5.6

Матрица полезности (эффективности) страхования груза

Решение владельца груза	"Природа"	
	Катастрофа (вероятность 0,1)	Без катастрофы (вероятность 0,9)
Страховать груз	+100	–5
Не страховать груз	–95	+5

Полезность исходов определяется владельцем груза следующим образом. Если груз застрахован, то в случае его утраты владелец получает страховую компенсацию в размере 100 единиц, если же катастрофы не было, он теряет 5 единиц, потраченных на страховой полис. Если груз не застрахован, в случае катастрофы теряется его стоимость – 95 единиц, при благополучном же исходе владелец может распорядиться суммой в 5 единиц, сэкономленной на страховом полисе.

Страховать или не страховать груз?

243. Вам предлагается инвестировать (вложить) средства в два предприятия на выбор. При этом следует учитывать, что:

первая инвестиция допускает потерю вами 1 млн руб. с вероятностью 0,5;

вторая – потерю 2 млн руб. с вероятностью 0,3.

Какое решение сопряжено с меньшим риском?

§ 5. Сетевое планирование

244. Производственная задача решается в три этапа (I, II и III). Исходным моментом является получение директором предприятия задания (заказа). Далее на основании этого задания под руководством заместителя директора по производству разрабатываются задания подразделениям № 1 и № 2. После этого подразделения одновременно приступают к I этапу работы. Для того чтобы начать II этап работы, подразделение № 2 должно получить комплект изделий, изготовленных подразделением № 1 в ходе I этапа. Поэтому подразделение № 1 начинает II этап работы сразу же после окончания I этапа, а подразделение № 2 – лишь после получения комплектующих из подразделения № 1. Далее роли подразделений меняются: для того чтобы начать III этап, теперь уже подразделение № 1 должно ожидать комплектующих от подразделения № 2. С окончанием III этапа работы обоими подразделениями изделие считается готовым. Транспортная служба доставляет его потребителю.

Все мероприятия решаемой задачи в их взаимосвязи представляются в виде наглядной схемы – сетевого графика (рис. 5.3), состоящего из двух типов элементов: работ и событий.

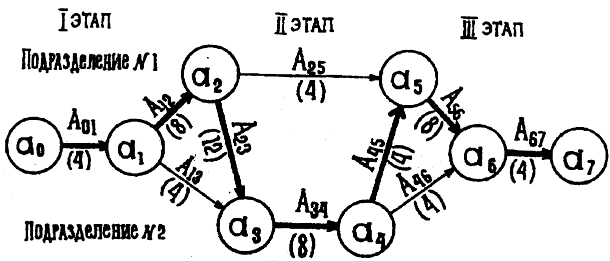

Рис. 5.3. Схема сетевого графика

Работа представляет собой выполнение некоторого мероприятия, например определенной технологической, транспортной или складской операции. Работа связана с затратой времени и расходом ресурсов, она должна иметь начало и конец. Работа обозначается на графике стрелкой, над которой проставлен номер работы (прописная буква с индексом), а под ней – продолжительность работы (в скобках).

Событиями называются начальные и конечные точки работы, например начало или окончание производственной операции. Событие не является процессом и поэтому не сопровождается затратами времени или ресурсов. Событие обозначается кружком, внутри которого строчная буква с индексом.

Относительно данной работы события могут быть предшествующими (непосредственно перед ней) и последующими (непосредственно за ней). Относительно данной работы другие работы могут быть предшествующими и последующими. Каждая входящая в данное событие работа является предшествующей каждой выходящей работе; каждая выходящая работа является последующей для каждой входящей.

Основные свойства сетевого графика:

ни одно событие не может произойти до тех пор, пока не будут закончены все входящие в него работы;

ни одна работа, выходящая из данного события, не может начаться до тех пор, пока не произойдет данное событие;

ни одна последующая работа не может начаться раньше, чем будут закончены все предшествующие ей работы.

Как построить и проанализировать сетевой график в масштабе времени?

245. Мы пригласили друзей на ужин. Поскольку я недавно прочитал книгу по экономико-математическим методам, то решил подготовиться к этому радостному событию по всем правилам сетевого планирования.

Итак, обстановка. Моя семья состоит из жены, дочери и тещи. Я целый день на работе. Готовиться к приему гостей придется моим женщинам. Им предстоит купить продукты, что займет около двух часов, если это будет делать одна жена (либо один час, если вместе с ней за продуктами отправится дочь). На приготовление ужина жена потратит еще два часа (вместе с дочерью – один час). Кроме того, следует убрать квартиру, на что теща потратит примерно час, если будет работать вместе с дочерью (либо в два раза больше времени, если станет убирать сама). И, наконец, после того как квартира будет убрана и ужин готов, можно будет накрывать на стол, на что уйдет еще час (этим обычно занимается дочь).

Необходимо разработать сетевой график приготовления к ужину, построить критический путь и проанализировать его с помощью графика, для того чтобы выявить имеющиеся резервы времени и решить нашу задачу в кратчайший срок.

Как это сделать?

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА И ЛОГИКА

(Необходимые пояснения к решениям см. в главе 2)

§ 1. Дроби, доли, пропорции и основные действия арифметики и алгебры

1. Надо разделить 25 у.д.ед. на 50 частей (49 + 1). Это даст 25 : 50 = 0,5 у.д.ед., что будет меньшей из двух частей.

Большая часть будет содержать 49 частей и составит $0{,}5 \cdot 49 = 24{,}5$ у.д.ед.

2. Вначале определим, какой процент от общего числа составляют отсутствующие акционеры:

$$\frac{20}{100+20}\cdot 100 = 16{,}7\ \%.$$

Тогда процент, который составляли присутствующие акционеры, будет равен: 100 % – 16,7 % = 83, 3%.

3. Средняя месячная оплата труда менеджера составляет:

$$\frac{260\ \text{тыс. у.д.ед.}}{5\ \text{мес.}} = 52\ \text{тыс. у.д.ед. в месяц.}$$

За 7 месяцев зарплата в деньгах составит:

$$52 \text{ тыс. у.д.ед.} \cdot 7 = 364 \text{ тыс. у.д.ед.}$$

Но за это время менеджер уже получил 240 тыс. у.д.ед. Следовательно, премия оценена в 364 – 240 = 124 тыс. у.д.ед.

4. Возраст фирмы Б равен: 31 – 8 = 23 года.

Возраст фирмы А равен: 23 · 2 = 46 лет.

5. Если бы у партнеров было 8 общих счетов, Семенов израсходовал бы их за 12 мес. · 8 = 96 мес. А Семенов и Федоров за 96 месяцев израсходовали бы $\frac{96}{8} = 12$ счетов.

Теперь понятно, что за эти же 96 месяцев Федоров израсходовал бы 12 счетов – 8 счетов = 4 счета.

Отсюда понятно, что один счет Федоров способен израсходовать за $\frac{96 \text{ мес.}}{4} = 24$ месяца.

6. Поскольку каждый должен вложить равную долю – 150 тыс. руб., то долг 3-го компаньона 1-му составляет 230 – 150 = = 80 тыс. руб., а его долг 2-му – 220 – 150 = 70 тыс. руб.

7. Находим, какие доли дома строительные организации строят за один год, и суммируем эти доли:

$$^1/_3 + {}^1/_2 + {}^1/_4 + 1 = {}^{25}/_{12} \text{ дома.}$$

Исходя из того, что эта суммарная доля строится за 365 дней, рассчитываем (из пропорции), за сколько дней строится единица дома:

$$\frac{365 \cdot 12}{25} = 175\tfrac{1}{5} \text{ дня.}$$

8. По условию задачи производительность бригады № 1 равна $^1/_3$ объекта в месяц, а бригады № 2 – $^1/_6$ объекта в месяц. К середине второго месяца работы бригада № 2 успела сделать $^1/_6 \cdot 1^1/_2 = {}^1/_4$ работы по созданию объекта. Осталось, следовательно, еще $1 - {}^1/_4 = {}^3/_4$ работы. Общая производительность обеих бригад равна $^1/_3 + {}^1/_6 = {}^1/_2$ объекта в месяц.

Значит, на оставшуюся работу обеим бригадам потребуется

$$^3/_4 : {}^1/_2 = 1^1/_2 \text{ месяца.}$$

А всего строительство займет $1^1/_2 + 1^1/_2 = 3$ месяца.

9. Соотношение 2 : 4 : 20 означает, что полуосей должно быть $^2/_{26}$ от 52 000, или 4000 ед., колесных дисков – $^4/_{26}$, или 5000 ед., и гаек – $^{20}/_{26}$, или 40 000 ед. Это дает 7,7 %, 15,4 %, 76,9 % соответственно.

10. Когда менеджер начал обход, у него оставалась половина рабочего времени. Эта половина состоит из трех частей: две – на обход и одна – в кабинете. Следовательно, на обход менеджер затратил $^2/_3$ от половины, т.е. $^1/_3$ рабочего времени.

11. Первая бригада отработала $5 \cdot 10 = 50$ человеко-дней, вторая бригада – $7 \cdot 4 = 28$ человеко-дней, объединенная бригада – $12 \cdot 5 = 60$ человеко-дней.

Всего общая работа составила $50 + 28 + 60 = 138$ человеко-дней.

А заработок на одного рабочего той и другой бригады равен:

$$1518 : 138 = 11 \text{ у.д.ед. в день.}$$

Следовательно, каждый рабочий в первой бригаде получил:

$$11 \cdot (10 + 5) = 165 \text{ у.д.ед.,}$$

а каждый рабочий во второй бригаде – $11 \cdot (4 + 5) = 99$ у.д.ед.

12. Обозначая искомый срок одновременной работы всех цехов над заказом через x, можно представить условие задачи следующим образом:

$$\left(\frac{1000}{10}+\frac{1000}{25}+\frac{1000}{20}\right)x = 2280,$$

откуда $x = 12$ дней.

Итак, 1) выпуск цеха № 1 должен составлять $100 \cdot 12 = 1200$ ед., выпуск цеха № 2 – $40 \cdot 12 = 480$ ед., выпуск цеха № 3 – $50 \cdot 12 = 600$ ед.

2) Срок совместной работы над заказом равен 12 дням.

13. Таких пар дробей много. Например:

$$\frac{-4}{8} = \frac{6}{-12} = -\frac{1}{2}.$$

14. Если обозначить через x время, которое прошло с начала суток, то по условию задачи оставшееся время будет равно:

$$2 \cdot {}^{2}/_{5}\, x.$$

Если учесть, что прошедшее и оставшееся время в сумме составляет сутки:

$$x + 2 \cdot {}^{2}/_{5}\, x = 24,$$

то $x = 13^{1}/_{3}$, или 13 ч 20 мин.

15. Прямой убыток предприятия от стихийного бедствия складывается из стоимости разрушенного помещения, находившегося в нем оборудования, других материальных ценностей, затрат на расчистку территории за вычетом средств, которые могут быть получены в результате реализации части поврежденного имущества:

$$10 + 80 + 50 + 30 + 15 = 185 \text{ млн у.д.ед.}$$

Косвенный убыток складывается из затрат на восстановление объекта и суммы недополученной прибыли:

$$60 + 5 = 65 \text{ млн у.д.ед.}$$

Общий убыток предприятия составляет

$$185 + 65 = 250 \text{ млн у.д.ед.}$$

16. Страховое возмещение рассчитывается как разность между суммой ущерба, оцененного страховой компанией, и суммой, которую должно выплатить охранное предприятие, за вычетом стоимости похищенных транспортных средств (она входит в сумму, выплаченную охранным предприятием):

$$300 - (150 - 50) = 200 \text{ млн у.д.ед.}$$

17. 1) Литр дорогого молока продавался за 1 у.д.ед, а литр дешевого – за $^{1}/_{2}$ у.д.ед. Литр смеси стоил

$$\frac{1 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4} \text{ у.д.ед.,}$$

а фактически продавался за $^{2}/_{3}$ у.д.ед.

2) Таким образом, торговец на каждом литре терял

$$^3/_4 - ^2/_3 = ^1/_{12} \text{ у.д.ед.}$$

3) Поскольку всего он потерял 50 у.д.ед, значит, было продано $50 : ^1/_{12} = 600$ л смеси, в которой каждого вида молока было $600 : 2 = 300$ л.

4) За 300 л дорогого молока можно было выручить

$$300 \cdot 1 = 300 \text{ у.д.ед.},$$

а за 300 л дешевого –

$$300 \cdot ^1/_2 = 150 \text{ у.д.ед.}$$

Фактически за 300 л смеси было получено $300 \cdot ^2/_3 = 200$ у.д.ед.

5) Следовательно, на дорогом молоке потеряно

$$300 - 200 = 100 \text{ у.д.ед.},$$

а на дешевом приобретено

$$200 - 150 = 50 \text{ у.д.ед.}$$

18. Обозначая через x и y доходы компаний А и Б пять лет назад, можно записать условие задачи следующим образом:

$$\frac{x}{y} = 6; \qquad (1)$$

$$\frac{x + 5 \cdot 100}{y + 5 \cdot 100} = 2. \qquad (2)$$

Решая систему из двух уравнений с двумя неизвестными, из (1) получим:

$$x = 6y.$$

Подставляя значение x в (2), будем иметь:

$$6y + 500 - 2y - 1000 = 0,$$

откуда $y = 125$, $x = 6y = 750$.

Итак, 1) доход компании А пять лет назад был 750 тыс. у.д.ед.; доход компании Б пять лет назад был 125 тыс. у.д.ед.; 2) доход компании А в настоящее время $750 + 5 \cdot 100 = 1250$ тыс. у.д.ед.; доход компании Б в настоящее время $125 + 5 \cdot 100 = 625$ тыс. у.д.ед.

19. Обозначая вес контейнера с товаром через x, а вес контейнера через y, можно математически записать условие задачи так:

1) $x + (x + 2) = 8$, откуда $x = 3$ т;

2) $3 = y + 0{,}5y$, откуда $y = 2$ т.

Следовательно, вес товара равен 3 – 2 = 1 т.

20. Да, это так. Парное число получается путем деления первого числа (а) на (а – 1). Так, если первый партнер внес 3 млн, то второй должен внести $\frac{3}{3-1} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ млн.

При этом сложение капитала даст $3 + 1^1/_2 = 4^1/_2$ млн, как и умножение: $3 \cdot 1^1/_2 = 4^1/_2$.

21. Из условия задачи следует, что панели А и Б весят одинаково, а также что $^1/_3$ веса каждой из этих панелей равна 200 кг.

Следовательно, панели А и Б весят по 200 · 3 = 600 кг.

22. Взнос предпринимателя В, равный 320 тыс. у.д.ед., составляет $^1/_3$ прежнего складского капитала. Значит, весь этот капитал был равен 320 · 3 = 960 тыс. у.д.ед. Причем в этом капитале доли А и Б относились как 1,5 : 1, т.е. были соответственно равны 576 и 384 тыс. у.д.ед.

Теперь нужно разделить сумму, равную взносу В, между А и Б так, чтобы у каждого из них оказалось по $^1/_3$ от нового складского капитала, который будет, так же как и старый, равен 960 тыс. у.д.ед. (взнос В не войдет в этот капитал, так как будет роздан А и Б). Для этого нужно вернуть предпринимателю А столько денег, чтобы его доля после этого оказалась равной 960 : 3 = 320 тыс. у.д.ед. Иными словами, он должен получить 576 – 320 = 256 тыс. у.д.ед. А предприниматель Б должен получить 384 – 320 = 64 тыс. у.д.ед.

23. Обозначим через x длину отрезка проволоки, причитающейся владельцу Б. Тогда условие задачи можно будет записать так:

$$^3/_8x + x = 2200 \text{ м}.$$

Решая это уравнение, получим $x = \frac{2200 \cdot 8}{11} = 1600$ м.

А владельцу А будет причитаться 2200 – 1600 = 600 м.

24. 1) В исходном положении сосуд № 1 содержит 1,1 л тоника, а сосуд № 2 – 0,5 л джина.

2) Из сосуда № 1 в сосуд № 2 переливают 0,5 л тоника (чтобы удвоить там количество жидкости). Теперь в сосуде № 1 осталось 0,6 л тоника, а в сосуде № 2 оказался 1 л смеси, состоящий поровну из джина и тоника.

3) Из сосуда № 2 в сосуд № 1 переливается 0,6 л смеси (столько, сколько оставалось в сосуде № 1), состоящей из 0,3 л джина и 0,3 л тоника. Теперь в сосуде № 1 0,3 л джина и 0,9 л тоника, а в сосуде № 2 осталось 0,2 л джина и 0,2 л тоника.

4) Из сосуда № 1 в сосуд № 2 переливается 0,4 л смеси (чтобы удвоить там ее количество), содержащей 0,1 л джина и 0,3 л тоника (смесь в сосуде № 1 имеет соотношение джина и тоника 1 : 3). После всего этого количество жидкости в сосудах стало по 0,8 л.

В сосуде № 1 образовалась смесь из 0,6 л джина и 0,2 л тоника (3 : 1 – крепкий коктейль).

В сосуде № 2 – смесь из 0,3 л джина и 0,5 л тоника (3 : 5 – слабый коктейль).

25. Обозначив количество голосов, поданных за различные виды пасты, их начальными буквами, можно представить результаты маркетингового исследования в таком виде:

$$А - З = 15,$$

$$А - О = 19,$$

$$А - У = 24.$$

$$А + З + О + У = 4442. \qquad (*)$$

Суммируя первые три выражения, получим:

$$3А - (З + О + У) = 58. \qquad (**)$$

Складывая (*) и (**), получим 4А = 4500, откуда А = 1125 голосов.

Соответственно:

$$З = 1125 - 15 = 1110 \text{ голосов},$$

$$О = 1125 - 19 = = 1106 \text{ голосов},$$

$$У = 1125 - 24 = 1101 \text{ голос}.$$

26. Первому – два автомобиля, второму и третьему – по одному (первый получает не больше, чем второй и третий вместе).

27. Семибоярову досталось от деда $^1/_4$, от прадеда $^1/_8$ и от прапрадеда $^1/_{16}$ "предпринимательской крови", а всего $^1/_4 + {}^1/_8 + {}^1/_{16} = {}^7/_{16}$.

Иззагардинер получил "в наследство" от отца $^1/_2$, а от деда $^1/_4$ "предпринимательской крови", а всего $^1/_2 + {}^1/_4 = {}^{12}/_{16}$.

Стало быть, он значительно "родовитее".

§ 2. Простые и сложные проценты

28. На 400 %.

29. На 80 %.

30. В 1,5 раза.

31. В 2 раза.

32. Величина ссуды ($С_с$) равна

$$С_с = \frac{Д}{НП} \cdot 100 = \frac{10^6}{5} \cdot 100 = 2 \cdot 10^7 = 20 \text{ млн руб.}$$

33. Величина дохода (Д) равна

$$Д = \frac{С_с \cdot НП}{100} = \frac{3 \cdot 10^5 \cdot 10}{100} = 3 \cdot 10^4 = 30\,000 \text{ руб.}$$

34. Банковская прибыль (БП) равна:

$$БП = \frac{5\,000\,000}{100} \cdot 10 - \frac{10\,000\,000}{100} \cdot 4 = 100\,000 \text{ руб.}$$

35. Суммарный капитал равен 150 млн руб. Прибыль на капитал равна $\frac{150}{100} \cdot 30 = 45$ млн руб. Выплата за ссуду составит 5 млн руб. Предпринимательский доход равен 45 – 5 = 40 млн руб.

36. Прибыль рассчитывается по формуле:

$$ПР = В - (МЗ + НР + ЗЗП),$$

где В – выручка, МЗ – материальные затраты, НР – накладные расходы, ЗЗП – затраты на зарплату.

Подставляя соответствующие цифры, получим:

$$ПР = 100\,000 - (50\,000 + 10\,000 + 10\,000) - 30\,000 \text{ у.д.ед.}$$

Налог на прибыль (НПР) равен 32 % от ПР, т.е. 9600 у.д.ед. Чистая прибыль (ЧПР) равна:

$$ПР - НПР = 30\,000 - 9600 = 20\,400 \text{ у.д.ед.}$$

37. По формуле сложных процентов (см. табл. 2.1) через два года вклад будет составлять:

$$К = 10\,000\,(1 + 0{,}1)^2;$$

$$\lg К = \lg 10\,000 + 2 \lg 1{,}1 = 4 + 2 \cdot 0{,}0414 = 4{,}0828.$$

Антилогарифм = 12 100 руб. Или приблизительно:

$$К = 10\,000 \cdot e^{0{,}2} \approx 12\,214 \text{ руб.}$$

38. 1) На 50%, 2) на 100 %.

39. Примем первоначальную цену товара и зарплату в 1000 руб. Тогда новая цена товара будет 150 000 руб., а новая зарплата – 100 000. Реальная зарплата при этом уменьшилась на

$$\frac{150\,000 - 100\,000}{150\,000} \cdot 100 = 33\,\%.$$

40. 80 % от 25 % равно 20 %.

41. 1) Курс акций ($К_а$) рассчитывается по формуле

$$К_а = \frac{Д}{СП},$$

где Д – дивиденд, СП – ссудный процент.

Курсовая стоимость акции 30 тыс. руб.

2) Учредительская прибыль (УП) рассчитывается по формуле

$$УП = СЦ_к - СЦ_н,$$

где $СЦ_к$ и $СЦ_н$ – суммарная цена по курсу и по номиналу соответственно.

$$УП = 1000 \cdot 30 - 1000 \cdot 10 = 1000 \cdot 20 \text{ тыс. руб.} = 20 \text{ млн руб.}$$

42. Предположим, рассматривается экономия энергетических ресурсов, эквивалентных 100 т топлива. Тогда в результате реализации первого предложения можно будет обойтись 65 т топлива (100 – 35), после реализации второго предложения – 32,5 т (65 – 50 % от 65), после реализации третьего – 27,7 т (32,5 – 15 % от 32).

Таким образом, общая экономия составит:

$$100 - 27{,}7 = 72{,}3\ \%.$$

43. В тонне сахара при влажности 15 % содержится 150 кг воды и 850 кг сухого вещества. После просушки количество воды уменьшилось на 80 кг и стало равно 70 кг. Следовательно, теперь влажность сахара равна:

$$\frac{70}{70+850}\cdot 100 = 7{,}6\,\%.$$

44. В слитке сплава по условию задачи содержится 4 кг золота. С учетом этого обстоятельства и принимая за x количество золота, которое нужно добавить к слитку, можно записать условие задачи так:

$$\frac{4+0x}{10+x}\cdot 100 = 80\,\%,$$

откуда $x = 20$ кг.

45. Раньше 5 деталей из 100 были с браком, теперь 1 деталь из 100. Следовательно, брак сократился на

$$\frac{5-1}{5}\cdot 100 = 80\,\%.$$

46. Принимая число присутствующих на собрании за x, можно написать:

$$0{,}2x + 10 = 0{,}3(x - 10),$$

откуда $x = 130$ человек.

Всего в коллективе $130 = 0{,}2 \cdot 130 = 156$ человек.

47. План января был выполнен на 100 + 6 = 106 % , план февраля – на 106 + (6 % от 106) = 106 + 6,36 = 112,36 % , план марта – на 112,36 + (6 % от 112,36) = 112,36 + 6,74 = 119,1 %.

За все три месяца план был выполнен на

$$106 + 112{,}36 + 119{,}1 = 337{,}46\ \%,$$

что соответствует среднемесячному плану: 337,46 : 3 = 112,49 %.

Следовательно, среднемесячный план был перевыполнен на

$$112{,}49 - 100 = 12{,}49\ \%.$$

48. Норма накопления (НН) рассчитывается по формуле:

$$\text{НН} = \frac{\Pi_{\text{нак}}}{\Pi_{\text{пот}}} \cdot 100,$$

где $\Pi_{\text{нак}}$ – масса прибыли, направляемая на накопление; $\Pi_{\text{пот}}$ – масса прибыли, направляемая на потребление.

$$\text{НН} = {}^{10}/_{5} \cdot 100 = 200\ \%.$$

49. В работе ежедневно участвуют 36 операторов (в 90 % от 40 залов). Следовательно, каждый день свободны $x - 36$ операторов (где x – искомое количество операторов в фирме). В неделю по одному дню будут свободны $(x - 36) \cdot 7$ операторов. Отсюда, по условию задачи, на каждого оператора фирмы должен приходиться:

$$\frac{(x-36)\cdot 7}{x} = 1 \text{ свободный день в неделю},$$

или, после преобразований:

$$6x = 252,$$

откуда $x = 42$ оператора.

50. 0,09 %.

51. 1) Для заемщика – при проценте за кредит менее 30 % плюс ссудный процент.

2) Для заимодавца – при проценте за кредит более 30 % плюс ссудный процент.

52. При уровне инфляции, равном 50 – 10 = 40 % в год.

53. За 6 месяцев доход составляет $\frac{100-50}{50}\cdot 100 = 100\,\%$; за год – соответственно $100 \cdot 2 = 200$ %.

54. Продажная цена сертификата рассчитывается по следующей очевидной из условия задачи формуле:

$$100 - \frac{4}{12} = (1{,}5 \cdot 100) = 50 \text{ млн у.д.ед.}$$

55. Курс акций рассчитывается по формуле:

$$\frac{\text{Дивиденд}}{\text{Ссудный процент}} = \frac{30}{10}\cdot 100 = 300\,\%.$$

56. Учетная ставка векселя рассчитывается по формуле:

$$\text{Учетная ставка векселя} = \frac{\text{номинал} - \text{сумма выкупа векселя}}{\text{номинал} \cdot \text{срок наступления платежа}}\cdot 12 \cdot 100.$$

Подставляя соответствующие величины, получим:

$$\text{Учетная ставка векселя} = \frac{20-15}{20 \cdot 4}\cdot 12 \cdot 100 = 75\,\%.$$

57. Курсовая разница рассчитывается по формуле:

(Курс Центрального банка – курс сделки) · количество купленной валюты.

Подставляя соответствующие величины, получим:

$$(5600 - 5500) \cdot 1000 = 1\,000\,000 \text{ руб.}$$

Таким образом, доход предприятия от сделки составляет 100 тыс. руб.

58. 15 тыс. у.д.ед., приведенные к моменту начала обучения (см. табл. 2.1), равны:

$$\frac{15}{(1+0{,}1)^5} = \frac{15}{1{,}6105} = 9{,}314 \text{ тыс. у.д.ед.}$$

Это на 684 у.д.ед. меньше, чем нужно было уплатить в начале обучения. Так что выгоднее с оплатой не торопиться.

59. Процентная ставка (x) может быть найдена из следующего соотношения:

$$15 = 10(1 + x)^5, \text{ откуда } (1 + x)^5 = 1{,}5.$$

С помощью табл. 2.1, интерполируя, находим $x = 8{,}5$ %.

60. Из практики установлено, что это количество должно быть не менее чем 12.

61. Практика приводит к выводу, что наиболее вероятно рассчитывать на то, что:

1) $^1/_5$ акций может не дать дохода,
2) $^3/_5$ акций могут принести планируемый доход,
3) $^1/_5$ акций может принести доход выше планируемого.

62. Используя табл. 2.1, получим:

$$30 \cdot (1 + 0{,}05)^4 = 30 \cdot 1{,}216 = 36{,}48 = 36480 \text{ единиц.}$$

63. По первому варианту финансирования стоимость кредита составит:

$$100 \cdot 0{,}1 \cdot 3 \text{ года} = 30 \text{ млн у.д.ед.}$$
$$100 \cdot 0{,}1 \cdot 2 \text{ года} = 20 \text{ млн у.д.ед.}$$
$$100 \cdot \underline{0{,}1 \cdot 1 \text{ год} = 10 \text{ млн у.д.ед.}}$$

Всего 60 млн у.д.ед.

По второму варианту:

$$60 \cdot 0{,}1 \cdot 3 \text{ года} = 18 \text{ млн у.д.ед.}$$
$$100 \cdot 0{,}1 \cdot 2 \text{ года} = 20 \text{ млн у.д.ед.}$$
$$140 \cdot \underline{0{,}1 \cdot 1 \text{ год} = 14 \text{ млн у.д.ед.}}$$

Всего 52 млн у.д.ед.

Следовательно, второй вариант выгоднее.

64. Величина прибыли ($П_к$) рассчитывается по формуле:

$$П_к = К \cdot К_о \cdot Р,$$

где К – сумма инвестируемого капитала, $К_о$ – количество оборотов капитала за год (капиталоотдача), Р – рентабельность.

По первому варианту решения:

$$П_к = 100 \cdot 11 \cdot 0{,}15 = 161 \text{ млн у.д.ед.}$$

По второму варианту решения:

$$П_к = 100 \cdot 12 \cdot 0{,}14 = 168 \text{ млн у.д.ед.}$$

Второй вариант выгоднее.

65. 1) Рост выручки за год без учета изменения цен (индекс стоимости) равен:

$$\frac{150}{50} = 3.$$

2) Рост физического объема реализованной продукции равен:

$$\frac{3}{1{,}5} = 2.$$

3) Рост выручки по сравнению с прошлым годом в сопоставимых ценах равен:

$$\frac{150}{50 \cdot 1{,}5} = 2.$$

66. Убыток с учетом инфляции составил:

$$100 + \frac{50}{100} \cdot 100 = 150 \text{ млн у.д.ед.}$$

67. Банку за кредит нужно будет выплатить

$$\frac{200}{100} \cdot 60 = 120 \text{ млн у.д.ед.}$$

Страховая компания потребует за страховой полис

$$\frac{200}{100} \cdot 12 = 24 \text{ млн у.д.ед.}$$

Всего кредит обойдется предприятию в

$$120 + 24 = 144 \text{ млн у.д.ед.}$$

68. Страховая компания получит страховую премию, равную

$$\frac{50 \cdot 5}{100} + \frac{50 \cdot 5}{100} = 5 \text{ млн у.д.ед.}$$

69. При страховании по системе пропорциональной ответственности величина страхового возмещения рассчитывается по формуле:

$$\text{Сумма страхового возмещения} = \frac{\text{Страховая сумма} \cdot \text{Сумма фактического ущерба}}{\text{Стоимость объекта страхования}}$$

Подставляя соответствующие величины, получим:

$$\frac{100 + 60}{200} = 30 \text{ млн у.д.ед.}$$

70. При страховании по системе первого риска величина страхового возмещения выплачивается в размере нанесенного ущерба, но в пределах страховой суммы, т.е. в данном случае страховое возмещение равно 60 млн у.д.ед.

71. Страховой взнос без скидки равен 0,5 % от 100 млн у.д.ед., т.е.

$$\frac{100\,000\,000}{100} \cdot 0{,}5 = 500\,000 \text{ у.д.ед.}$$

Скидка за хорошее соблюдение правил безопасности равна 1 % от 500 000, т.е.

$$\frac{500\,000}{100} \cdot 1 = 5000 \text{ у.д.ед.}$$

Таким образом, страховой взнос с учетом скидки составляет:

$$500\,000 - 5000 = 495\,000 \text{ у.д.ед.}$$

72. При страховании по системе предельной ответственности страховое возмещение рассчитывается как определенный договором процент от разности между ожидаемым доходом от сделки и фактически достигнутым результатом:

$$\frac{200 - 150}{100} \cdot 70 = 35 \text{ млн у.д.ед.}$$

73. Интерполируя с помощью табл. 2.1, получим:

$$(1 + 0{,}06)^x = 2.$$

Откуда $x = 12$ месяцев.

74. Обозначим через x стоимость обыкновенной акции. Тогда условие задачи можно записать так:

$$(x + 2500) \cdot 0{,}1 = x \cdot 0{,}05 + 2500 \cdot 0{,}13.$$

Решая уравнение, получим:

$$0{,}1x + 250 = 0{,}05x + 325.$$

Всего, по условию задачи, имеется $250 \cdot 4 = 1000$ акций. Из них обыкновенных $1000 - 250 = 750$.

Следовательно, на 1 обыкновенную акцию предполагается выплатить

$$^{1500}/_{750} = 2 \text{ тыс. у.д.ед.}$$

Количество привилегированных акций 250. Следовательно, на 1 привилегированную акцию предполагается выплатить

$$^{2500}/_{250} = 10 \text{ тыс. у.д.ед.}$$

75. Пользуясь формулой (2.1), составим уравнение:

$$(1 + x)^3 = 3.$$

Откуда с помощью табл. 2.1 получим $x \approx 45$ %.

76. Пользуясь формулой (2.1), составим уравнение:

$$100 \cdot (1 + 1{,}35)^x = 600.$$

Откуда с помощью табл. 2.1 получим $x \approx 6$ дней.

77. Обозначим закупочную цену товара через x. Тогда оптовая цена составит $1{,}2x$, розничная цена $1{,}3\,(1{,}2x)$, а после ее снижения – $0{,}9[1{,}3(1{,}2x)]$.

По условию задачи эта последняя цена равна 100 у.д.ед., т.е. $0{,}9 \cdot 1{,}3 \cdot 1{,}2x = 100$.

Откуда $x = \dfrac{100}{0{,}9 \cdot 1{,}3 \cdot 1{,}2} = \dfrac{100}{14{,}04} = 71{,}22$ у.д.ед.

78. Обозначим через x фактическую цену продажи партии товара. При этом цена его покупки будет $\dfrac{x}{1{,}4}$.

Если бы товар был куплен на 30 % дешевле, цена покупки составила $\frac{x}{1,4}\cdot 0,7$; продажа этого товара по цене на 60 % дороже цены покупки была бы равна в этом случае $\frac{x}{1,4}\cdot 0,7\cdot 1,6$.

Итак, условие задачи можно записать следующим образом:

$$x-\frac{x}{1,4}\cdot 0,7\cdot 1,6=50\cdot 800,$$

откуда $x(1-0,2)=40\,000$; $x=200$ тыс. у.д.ед.

Следовательно:

1) партия товара была продана за 200 тыс. у.д.ед., а единица товара стоила

$$\frac{200\,000}{50}=4000 \text{ у.д.ед.};$$

2) цена покупки партии товара равна

$$\frac{200}{1,4}=142,857 \text{ тыс. у.д.ед.}$$

79. Обозначим через x и y соответствующее количество компонентов "Радость" и "Сладость" в 50 литрах коктейля. Тогда условие задачи можно будет записать так:

$$(x\cdot 7+y\cdot 5)\,1,25=50\cdot 8, \qquad (1)$$

$$x+y=50. \qquad (2)$$

Решим систему из двух уравнений с двумя неизвестными.

Подставляя значение y из уравнения (2) в (1), получим:

$$[x\cdot 7+(50-x)\cdot 5]\,1,25=50\cdot 8,$$

откуда $2,5x=87,5$, $x=35$ л.

Подставляя значение x в уравнение (2), получим:

$$y=50-35=15 \text{ л.}$$

Следовательно, в коктейле $^{35}/_{50}\cdot 100=70$ % напитка "Радость" и $^{15}/_{50}\cdot 100=30$ % напитка "Сладость".

80. Обозначим стоимость первой квартиры при ее покупке через x, а второй – через y. Тогда условие задачи можно записать так:

$$1{,}2x + 0{,}8y = 264 \text{ тыс. у.д.ед.} \quad (1)$$

$$(x + y)\ 1{,}1 = 264 \text{ тыс. у.д.ед.} \quad (2)$$

Из (1) следует, что

$$y = \frac{264 - 1{,}2x}{0{,}8}.$$

Подставляя значение y в (2), получим:

$$x + \left(\frac{264 - 1{,}2x}{0{,}8}\right) \cdot 1{,}1 = 264, \text{ откуда } x = 180 \text{ тыс. у.д.ед.}$$

$$y = \frac{264 - 1{,}2 \cdot 180}{0{,}8} = 60 \text{ тыс. у.д.ед.}$$

§ 3. Уравнения

81. Обозначим первоначальный капитал через x.
Тогда x + 1 млн руб. = $^1/_2$ (x + 2 млн руб.), откуда x = 0 руб.

82. 5 млн руб. и 2 млн руб.

83. Обозначая цену товара до и после снижения через x_1 и x_2, получим следующее очевидное соотношение:

$$x_1 - x_2 = \frac{x_1 - x_2}{100} x_1,$$

из которого видно, что x_1 = 100 руб.

84. Обозначим капитал акционера А через x, а капитал акционера Б через y и составим два очевидных уравнения:

$$x + 1 = (y - 1) \cdot 2, \quad (1)$$

$$x - 1 = y + 1. \quad (2)$$

Решая совместно уравнения (1) и (2), найдем:

x = 7 млн руб.

y = 5 млн руб.

85. Обозначив через x искомое количество акционеров, составим следующее очевидное уравнение:

$$x-\frac{1}{5}x+1=\frac{5}{6}x.$$

Решение этого уравнения дает искомый ответ:

$x = 30$ чел.

86. Принимая количество выпускаемых в день автобусов до реконструкции предприятия за x, можно записать условие задачи в виде следующего уравнения:

$$7(x + 1) - 10x = 4,$$

откуда $x = 1$, а количество автобусов, выпускаемых в день после реконструкции, равно $x + 1 = 2$.

87. Принимая первоначальный вес сахара за x, а вес сахара после просушки за x_1, можно записать условие задачи так:

$$x_1=x+\frac{x\cdot 30}{100}-\frac{30\cdot\left(x+\dfrac{x\cdot 30}{100}\right)}{100}=x-\frac{9}{100}\cdot x.$$

Следовательно, вес высушенного сахара стал на 9 % меньше первоначального.

88. Обозначая количество ресурсов в отделении № 1 до уравнивания через x, можно записать условие задачи следующим образом:

$$(x - 0{,}2x)\cdot 2 = 160,$$

откуда $x = 100$ млн у.д.ед.

В отделении № 2 количество ресурсов было равно:

$160 - 100 = 60$ млн у.д.ед.

89. Обозначая величину прибыли через x, можно записать условие задачи следующим образом:

$$x=\frac{1}{5}x+\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{5}x\right)+25+\frac{1}{10}x$$

или, после преобразований,

$$10x = 500,$$

откуда $x = 50$ млн у.д.ед.

90. Обозначая производительность издательства "Антарктида" через x, а издательства "Тропики" через y, можно записать условие задачи в виде двух уравнений:

$$\frac{4}{x} = \frac{3}{y}, \qquad (*)$$

$$\frac{20}{y} - \frac{20}{x} = 2. \qquad (**)$$

Совместное решение уравнений приводит к следующим результатам.

Из уравнения (*):

$$y = {}^3/_4 x.$$

Подставляя значение y в уравнение (**), получим:

$$20 = 6x,$$

отсюда $x = 3^1/_3$ авт. л. в месяц, $y = 2^1/_2$ авт. л. в месяц.

91. Обозначая через x нормативное время выполнения задания, а через y – нормативное количество изготавливаемых за это время деталей, можно представить условие задачи следующим образом:

$$(x - 12)\,(y + 0{,}1) = x \cdot y,$$

$$(x - 36)\,(y + 0{,}6) = x \cdot y.$$

Совместное решение системы уравнений с двумя неизвестными приводит к следующему результату:

$x = 60$ часов,

$y = 0{,}4$ детали в час.

Следовательно, автослесарь получил задание изготовить $0{,}4 \cdot 60 = 24$ детали (по 3 детали на каждый цилиндр).

92. Принимая общее количество учеников Пифагора за x, можно записать условие задачи так:

$$x - \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{7}\right) = 3,$$

откуда $x = 28$.

93. Обозначая количество изделий, планируемых к выпуску за год, через x, можно записать условие задачи следующим образом:

$$0{,}2x + 1{,}5 \cdot 0{,}2x + \frac{0{,}2x + 1{,}5 \cdot 0{,}2x}{2} + 7000 = x.$$

Отсюда, после преобразований,

$$x = 28\,000 \text{ изделий.}$$

94. Обозначая через x старый, а через y – новый расход сырья на один комплект мебели, можно записать условие задачи следующим образом:

$$\frac{500}{y} = \frac{600}{x} + 25, \qquad (*)$$

$$3y = 2x. \qquad (**)$$

Решая систему из двух уравнений с двумя неизвестными, из (**) получим $y = {}^2/_3x$. Подставляя значение y в (*), после преобразований получим:

$$x^2 - 6x = 0,\ \ x(x - 6) = 0,$$

откуда $x_1 = 0$ (не подходит по условию),

$$x_2 = 6.$$

Следовательно, раньше расходовалось на один комплект мебели 6 м^3 древесины, а теперь $y = {}^2/_3 \cdot 6 = 4$ м^3.

95. Вначале сообразим, что в 100 кг абрикосов сухое вещество составляет 10 %, т.е. весит 10 кг. Далее, обозначая вес кураги через x, можно записать условие задачи следующим образом:

$$0{,}3 = \frac{x - 10}{x},$$

откуда $x = 14{,}3$ кг, а искомая потеря в весе составила

$$100 - 14{,}3 = 85{,}7 \text{ кг.}$$

96. Обозначая через x первоначальное количество торговых точек, можно записать условие задачи следующим образом:

$$\left(\frac{180}{x} + 12\right)(x - 4) = 180.$$

После преобразований получим:

$$x - 4x - 60 = 0.$$

Решая квадратное уравнение по стандартной формуле, получим:

$$x_{1,2} = \frac{4}{2} \pm \sqrt{\frac{4^2}{4} + 60} = 2 \pm 8,$$

$x_1 = 10$ (x_2 не подходит, так как отрицательно).

Следовательно: 1) новое количество торговых точек равно $10 - 4 = 6$; 2) количество холодильников, которые при этом стали выделять каждой точке, равно $^{180}/_6 = 30$.

97. Обозначим через x первоначальное количество рублей, а через y – первоначальное количество копеек. Тогда в конце игры будет соответственно $^{4}/_{2}$ руб. и x коп. И условие задачи можно записать так:

$$100x + y = 2.$$

Откуда следует:

$$98x - 99y = 0, \qquad (*)$$

x и y должны быть обязательно целыми числами (это рубли и копейки). Анализируя условие (*), можно сообразить, что эта целочисленность будет иметь место, лишь если $y = 98$.

Отсюда $x = \dfrac{99 \cdot 98}{98} = 99$ руб.

98. Обозначая через x и y возраст первого и последнего филиала соответственно, запишем условие задачи следующим образом:

$$x - y = 9 - 1,$$
$$^{x}/_{y} = 5.$$

Решая систему из двух уравнений с двумя неизвестными, получим:

$$x = 5y;\ \ 5y - y = 8,$$

откуда $x = 2$, $y = 10$.

99. Обозначим общее число работников через x, тогда условие задачи можно записать так:

количество электриков равно

$$(x-1)^2/_3,$$

количество механиков –

$$(x-1)^3/_8.$$

Отсюда

$$8\cdot 2(x-1)+3\cdot 3(x-1)=8\cdot 3\cdot x;$$

$$x=25.$$

Количество электриков равно

$$(25-1)^2/_3=16,$$

количество механиков –

$$(25-1)^3/_8=9 \text{ (включая головного сборщика).}$$

100. Обозначим через x площадь арендуемого фирмой помещения, а через y – количество единиц продукции, идущих в уплату аренды. Тогда условие задачи можно записать так:

$$\frac{6+0{,}8y}{x}=50;\ \ \frac{6+1{,}2y}{x}=60.$$

Решая систему из двух уравнений с двумя неизвестными, получим:

1) $6+0{,}8y=\dfrac{6+1{,}2y}{60}\cdot 50;\ 360+48y-300-60y=0;\ y=50$ единиц;

$$2)\ x=\frac{6+0{,}8\cdot 5}{50}=0{,}2 \text{ тыс. м}^2=200 \text{ м}^2.$$

101. Обозначим начальные фонды, равные у обоих предприятий, через x. Тогда к моменту окончания первой операции предприятие А обладало фондом в размере, равном $x+30$, а предприятие Б – $x-30$ тыс. у.д.ед.

К моменту окончания второй операции фонд предприятия А составлял

$$x+30-{}^3/_4(x+30)={}^1/_4(x+3),$$

а фонд предприятия Б –

$$(x-30)+{}^3/_4(x+30).$$

Условие задачи будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{x-30+\frac{3}{4}(x+30)}{\frac{1}{4}(x+3)}=5. \qquad (1)$$

Решая уравнение (1), получим:

$$\frac{4(x-30)}{x+30}+3=5,\quad 4x-120=2x+60,$$

$$x = 90 \text{ тыс. у.д.ед.}$$

102. Обозначим через x стоимость месячного содержания помещений. Тогда условие задачи можно записать так:

$$x-(120-40) = {}^{40}/_{2} + {}^{1}/_{3}x.$$

Откуда, после преобразований, x = 150 тыс. у.д.ед. Вычитая полученную стоимость содержания помещений из дохода, найдем величину ежемесячных потерь арендатора:

$$(120-40)-150=-70 \text{ тыс. у.д.ед.}$$

103. Обозначая момент времени проверки постов охраны через x, можно математически записать условие задачи так:

$$x = {}^{1}/_{4}x + {}^{1}/_{2}(24-x).$$

Решая это уравнение, получим:

$$5x = 48;\ x = 9{,}6 = 9 \text{ ч } 36 \text{ мин.}$$

104. 1) Обозначим время от полудня до противостояния стрелок через x, а число делений, проходимых часовой стрелкой от цифры 12 до момента противостояния, – через y. Тогда условие задачи можно записать следующим образом:

$$x=\frac{y}{1/60}=\frac{y+6}{1/5}, \tag{1}$$

где ${}^{1}/_{60}$ – скорость минутной, а ${}^{1}/_{5}$ – скорость часовой стрелки.

Из (1) следует, что $y = {}^{6}/_{11}$ деления, а

$$x=\frac{y}{1/60}=\frac{360}{11}=32\tfrac{8}{11}\text{ мин, или } 32 \text{ мин } 43{,}6 \text{ с.}$$

Следовательно, заседание должно начаться в 12 ч 32 мин 43,6 с.

2) Следующее противостояние стрелок должно произойти через $2x$ часов, т.е. через $32^{8}/_{11}\cdot 2$ мин, или 1 ч $5^{5}/_{11}$ мин = 1 ч 5 мин 27,3 с.

105. Обозначив через x количество персонала на предприятии до реорганизации, а через y – количество дней, на которые хватает при этом зарплаты, запишем условие задачи следующим образом:

$$xy = (x + 80) \cdot (y - 5) = (x - 100) \cdot (y + 10). \qquad (*)$$

Решая это уравнение относительно второго и третьего равенств, получим:

$$180y = 15x - 600,$$

откуда $y = \dfrac{x-40}{12}$.

Из $(*)$ следует также, что

$$xy = (x + 80) \cdot (y - 5).$$

Подставляя в последнее выражение значение y, получим:

$$16x - 640 - 12x - 960,$$

откуда $x = 400$ человек, $y = 30$ дней.

Следовательно, 1) в настоящее время на предприятии работает 400 человек; 2) величина месячной (30-дневной) зарплаты составляет 40 000 : 400 = 100 у.д.ед.

106. Обозначим через x количество работников, а через y – их зарплату при работе предприятия в нормальном режиме; тогда условие задачи можно записать так:

$$xy = (x - 10) \cdot (y + 3) = (x + 50) \cdot (y - 5). \qquad (*)$$

Из второго равенства уравнения $(*)$ следует:

$$xy - 10y + 3x - 30 = xy + 50y - 5x - 250,$$

$$60y - 8x = 220,\ x = \frac{15y-55}{2}.$$

Из первого равенства уравнения $(*)$ следует:

$$xy = xy - 10y + 3x - 30 \text{ или } 10y - 3x + 30 = 0.$$

Подставляя в последнее выражение значение x, получим:

$$10y - \frac{3(15y-55)}{2} + 30 = 0,\ 2 \cdot 10y - 45y + 165 + 2 \cdot 30 = 0,$$

$$25y = 225,\ y = 9.$$

$$x = \frac{15 \cdot 9 - 55}{2} = 40.$$

Итак: 1) Численность персонала при работе в нормальном режиме – 40 человек; зарплата при этом 9 тыс. у.д.ед.

2) Фонд заработной платы равен $40 \cdot 9 = 360$ тыс. у.д.ед.

3) Численность персонала при работе в период спада составляет $40 - 10 = 30$ человек, а зарплата – $9 + 3 = 12$ тыс. у.д.ед.; численность персонала при работе в период увеличенной загрузки равна $40 + 50 = 90$ человек, а зарплата – $9 - 5 = 4$ тыс. у.д.ед.

107. Обозначим через x и y вложения в операции А и Б соответственно. Тогда условие задачи можно записать так:

$$x + y = 8, \tag{1}$$

$$x^2 + y^2 - 8 = 32. \tag{2}$$

Решим систему из двух уравнений с двумя неизвестными:

– из (1) следует, что $y = 8 - x$;

– подставляя значение y в (2), получим:

$$x^2 + (8 - x)^2 - 8 - 32 = 0,$$

откуда

$$x^2 - 8x + 12 = 0.$$

Решая квадратное уравнение по стандартной формуле, получим:

$$x_{1,2} = \frac{8}{2} \pm \sqrt{\frac{8^2}{4} - 12} = 4 \pm 2;$$

$x_1 = 6$ (x_2 не подходит, так как тогда $x < y$, что противоречит условию).

Следовательно, сумма вложения в операцию А равна 6 млн у.д.ед., а в операцию Б – $8 - 6 = 2$ млн у.д.ед.

108. Обозначим через x возраст сооружения Б. Тогда условие задачи можно записать так:

$$x + 3x + 15x + x + 10 = 70;$$

$$20x = 60,\ x = 3.$$

Следовательно, возраст сооружения А равен 9 годам, сооружения Б – 3 годам, сооружения В – 45 годам, сооружения Г – 3 годам, сооружения Д – 70 годам.

109. 1) Исходя из того, что 6 путевок в Каркодайл равноценны 9 путевкам в Фингалию, определим относительную ценность этих путевок. Она составит $^9/_{15}$ для Каркодайла и $^6/_{15}$ для Фингалии.

2) Исходя из этих относительных стоимостей и зная, что путевка в Каркодайл и Фингалию в сумме оценивается в 90 банок, рассчитаем стоимость каждой из путевок в отдельности:

путевка в Каркодайл стоит $90 \cdot {^9/_{15}} = 54$ банки икры,

путевка в Фингайл – $90 \cdot {^6/_{15}} = 36$ банок икры.

3) Информация о двух возможных вариантах приобретаемого количества путевок позволяет составить систему из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$2К + Ф = 23,$$
$$К + 2Ф = 25,$$

где К и Ф – количество путевок в Каркодайл и Фингалию соответственно.

Решение этой системы уравнений позволяет найти неизвестные: К = 7 и Ф = 9.

4) Подставляя эти цифры в уравнение, соответствующее второму варианту сделки, можно получить искомое количество банок икры, выделенных для оплаты путевок:

$$7 \cdot 54 + 2 \cdot 9 \cdot 36 = 1026 \text{ банок.}$$

110. Обозначив через x количество первоначально оплаченных дубленок, а через y – цену дубленки без учета стимулирования, можно записать условие задачи следующим образом:

$$x \cdot y = 18, \qquad (1)$$

$$(x + 6) \cdot (y - 0{,}15) = 18. \qquad (2)$$

Решая систему из двух уравнений с двумя неизвестными, подставим значение y из (1) в (2):

$$x^2 + 6x - 720 = 0. \qquad (*)$$

Решая квадратное уравнение (*) по стандартной формуле, получим:

$$x_{1,2} = -\frac{6}{2} \pm \sqrt{\frac{6^2}{4} + 720} = -3 \pm 27,$$

$x_1 = 24$ (x_2 не подходит, так как отрицательно).

111. Обозначим цену товара до и после снижения через x и y соответственно. Тогда условие задачи запишется так:

$$(200 + 100) \cdot y = 600, \qquad (1)$$

$$\frac{200+100}{200} = \frac{x}{y}. \qquad (2)$$

Из (1) следует, что

$$y = \frac{600}{200+100} = 2 \text{ у.д.ед.}$$

Подставляя значение y в (2), получим:

$$\frac{300}{200} = \frac{x}{2}, \text{ откуда } x = 3 \text{ у.д.ед.}$$

112. Обозначим через x уменьшение годового дохода предприятия в результате повышения цены на товар с y на z у.д.ед. и соответствующего падения объема продаж. Тогда условие задачи будет математически выглядеть так:

$$(500 - 0{,}25 \cdot 500) \cdot (y + z) = 4000 + x, \qquad (1)$$

$$\frac{y+z}{y} = \frac{500}{500-100}. \qquad (2)$$

Учитывая, что до повышения цены имело место равенство $500 \cdot y = 4000$, найдем $y = 8$ у.д.ед.

Тогда из (2) следует, что $\dfrac{8+z}{8} = \dfrac{500}{400} = \dfrac{5}{4}$,

откуда

$$(8 + z) \cdot 4 = 8 \cdot 5,\ 32 + 4z = 40,\ z = 2.$$

Из (1) следует, что

$$x = (500 - 100) \cdot (8 + 2) - 4000 - 0.$$

Следовательно, увеличение цены на товар и соответствующее уменьшение объема продаж (спроса) не привело к изменению годовой прибыли предприятия.

113. Обозначая через x объем продаж до его падения, а через y – соответствующую цену товара, запишем условие задачи следующим образом:

$$\left(x-\frac{x}{2}\right)(6+y)=x\cdot 6 \qquad (1)$$

или, что то же самое,

$$\frac{x-\frac{x}{2}}{x}=\frac{6}{6+y}=\frac{1}{2}. \qquad (2)$$

1) Из (2) следует $6 \cdot 2 = (6 + y) \cdot 2$, откуда $y = 6$.

2) Из (1) следует, что x может быть любым, так как на него можно сократить обе части уравнения:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)(6+6)=6.$$

114. Обозначая через x стоимость грузовой автомашины, а через y – стоимость станка, купленных компаньоном А, нетрудно установить, что стоимость легковой автомашины равна y, а стоимость станка, приобретенного компаньоном Б, составляет $x - 2$.

Из условия задачи также следует, что

$$x + y = 24$$

и суммарная стоимость автомашины также равна 24 тыс. у.д.ед.

Следовательно, если бы легковая автомашина была в три раза дороже грузовой, то они должны были бы стоить соответственно 18 и 6 тыс. у.д.ед. и равенство трат компаньонов можно было бы записать так:

$$18 + (x - 2) = 6 + (24 - x),$$

откуда $18 + x - 2 = 6 + 24 - x$, $x = 7$, $y = 24 - 7 = 17$.

Итак: 1) Стоимость покупок: станок, купленный компаньоном А, – 17 тыс. у.д.ед., а купленный компаньоном Б – 5 тыс. у.д.ед. Стоимость грузовой автомашины – 7 тыс. у.д.ед., а легковой – 17 тыс. у.д.ед.

2) Всего было потрачено:

– компаньоном А: 17 + 7 = 24 тыс. у.д.ед.,

– компаньоном Б: 5 + 17 = 22 тыс. у.д.ед.

115. Обозначим через x торговую наценку (в долях от 1), через y – стоимость товара без наценки и через z – сумму комиссионных агенту по продаже. Тогда условия задачи можно записать так:

$$(820 + 100) \cdot (1 + x) - 600 = 504, \tag{1}$$

$$504 - y \cdot x = y. \tag{2}$$

1) Величину торговой наценки найдем из (1):

$$920 + 920x - 600 - 504 = 0; \; x = \frac{184}{920} = 0{,}2.$$

2) Из (2) следует, что стоимость оставшегося товара без торговой наценки (товар не продан) равна:

$$504 - y(1 + x) = 0,$$

а стоимость проданного товара без учета торговой наценки:

$$(820 + 100) - 420 = 500 \text{ тыс. у.д.ед.}$$

Отсюда прибыль равна:

$$600 - 500 = 100 \text{ тыс. у.д.ед.}$$

3) Из условий задачи:

$$238 + 100 - z + 100 = 420,$$

откуда $z = 18$ тыс. у.д.ед., а в процентах – $^{18}/_{600} = 3$ %.

116. Обозначим через x, y, z купленные количества компьютеров, телефонов и столов соответственно. Тогда условие задачи можно записать так:

$$9{,}5x + 0{,}5y + 0{,}25z = 30$$

или, после умножения левой и правой частей на 4,

$$38x + 2y + z = 120, \tag{1}$$

$$x + y + z = 30. \tag{2}$$

Вычитая (2) из (1), получим:

$$37x + y = 90, \text{ откуда } z = 90 - 37x. \tag{3}$$

Из (3) следует, что x может быть только 2, так как, во-первых, z и x должны быть целыми положительными числами, во-вторых, x не может быть 1, так как при этом z становится равным 53, что противоречит условию (всего куплено 30 единиц), и, в-третьих, x не может быть больше 2, так как при этом z становится отрицательным.

Итак, $x = 2$ единицы.

Из (3) следует, что $z = 90 - 37 \cdot 2 = 16$ единиц,

из (2): $y = 30 - 2 - 16 = 12$ единиц.

117. Обозначим через x деньги родителей, а через y – деньги детей. Тогда условие задачи можно записать так:

$$\frac{4}{5}x + y = 600 \text{ тыс. у.д.ед.,} \quad (1)$$

$$\frac{5}{6}y + x = 600 \text{ тыс. у.д.ед.} \quad (2)$$

Из (1): $y = 600 - \frac{4}{5}x$.

Подставляя значение y в (2), получим:

$$\frac{5}{6}\left(600 - \frac{4}{5}x\right) + x = 600$$

или, после преобразований: $^1/_3 x = 100$.

Следовательно: 1) $x = 300$ тыс. у.д.ед.,

$y = 600 - {}^4/_5 \cdot 300 = 360$ тыс. у.д.ед.

2) Цена участка, по условию задачи, равна остающейся у родителей или у детей сумме денег, т.е. $^1/_5 x$ или $^1/_6 y$.

Значит, она равна $^1/_5 \cdot 300 = 600$ тыс. у.д.ед.

§ 4. Прогрессии и комбинаторика

118. За 30 дней мне заплатят 30 · 100 тыс. руб.= 3 млн руб.

Я же заплачу:

За 1-й день – 1 коп.,

за 2-й день – 2 коп.,

...

за 11-й день – 10 руб. 24 коп.,

...

за 21-й день – 10 485 руб. 76 коп.,

за 30-й день – 5 368 709 руб. 12 коп.

За 30 дней общая сумма, которую мне придется выплатить, составит 10 737 418 руб. 23 коп., т.е. примерно в три раза больше того, что я получу.

119. Все зависит от того, сколько было денег вначале. Если в начале сделки вы располагали всего 2100 руб., то к концу первого месяца их станет 2100 · 2 – 2400 = 1800 руб., к концу второго месяца – 1800 · 2 – 2400 = 1200 руб., к концу третьего – 1200 · 2 – 2400 = 0 руб., и на этом сделка закончится с вашим убытком в 2100 руб.

Нетрудно сообразить, что для успеха сделки ваш первоначальный вклад должен быть больше, чем та сумма, которую вы должны ежемесячно выплачивать банку. Математически это условие запишется так. Обозначим необходимую для второй сделки сумму первоначального вклада через x. Тогда $x \cdot 2 - 2400 > x$, откуда видно, что $x > 2400$ руб.

120. Для устного быстрого решения задачи нужно сообразить, что сумма последовательных чисел от 1 до 100 складывается из следующей суммы пар чисел: 1-го с последним, 2-го с предпоследним и т.д. Каждая такая пара равна в сумме 101, а всего таких пар 50.

Итак, нужно просто умножить 101 на 50, что легко сделать устно: 101 · 50 = 5050.

121. По формуле комбинаторики число размещений из 12 элементов по m ($A^m{}_n$) равно:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!},$$

отсюда $A_5^4 = \frac{5!}{(5-4)!} = 120$ способов.

122. Источник средств 1) скидки в цене чудо-средства и 2) для оплаты труда его распространителей один и тот же. Здесь мы имеем дело с геометрической прогрессией: на десятом обороте средств в операции продажи должна участвовать уже тысяча распространителей-покупателей, на двадцатом – миллион и т.д. И хотя простаков, желающих поиграть в такую игру, довольно много (они заполняют все переходы в метро), все же рано или поздно им наступает конец. Крайние в этой цепочке не могут найти очередных клиентов: все уже расхватаны. Вот эти-то крайние и расплачиваются за все.

123. Всего примерно 160 делений.

Вот приближенный расчет. Диаметр атома равен примерно 10^{-8} см. Диаметр Земли $12{,}5 \cdot 10^{8}$ см. Отношение объемов при этом составляет приближенно 10^{48}. Но $10^{48} = 2^{160}$ (исходя из того, что $10^{3} = 2^{10}$). Последняя цифра как раз и соответствует количеству делений пополам, равному 160, при котором Земля дробится до размера атома.

124. Главная ошибка заключается в том, что мы не учли родственные связи людей: у очень многих из нас общие предки. Люди значительно сильнее связаны кровными узами, чем это принято считать. Вот яркий пример: прямой предок великого русского национального гения А.С. Пушкина (всего в нескольких поколениях) – негр. А один из его прямых потомков – китаец.

§ 5. Функции и графики

125. 1) Строим график производственных возможностей (рис. Р.1).

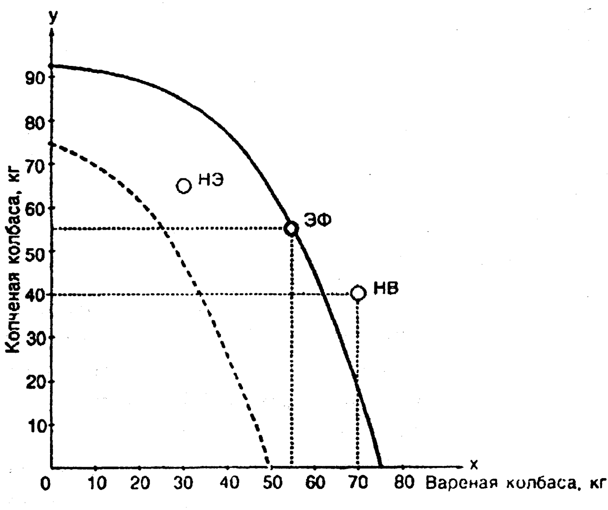

Рис. Р.1

2) Заказ "а" соответствует невозможному бизнесу, так как соответствующая точка оказывается вне пределов линии производственных возможностей; заказ "б" отвечает эффективному бизнесу – соответствующая точка лежит на кривой производственных возможностей; заказ "в" приводит к возможному, но неэффективному бизнесу – точка оказывается внутри линии производственных возможностей.

126. Из графика рис. Р.1 видно, что для точки линии производственных возможностей, соответствующей 30 кг вареной колбасы, количество копченой колбасы должно быть равно 85 кг, т.е. на 10 кг больше.

127. Строим график производственных возможностей (рис. Р.2).

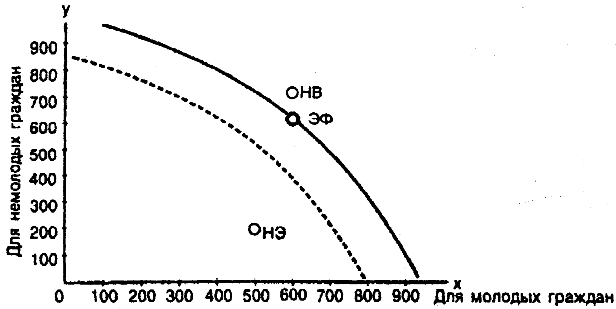

Рис. Р.2

2) Вариант "а" соответствует неэффективному бизнесу, так как ему на графике соответствует точка НЭ, находящаяся внутри площади, ограниченной линией производственных возможностей; вариант "б" соответствует эффективному бизнесу – соответствующая ему точка на графике (ЭФ) лежит на линии производственных возможностей; вариант "в" соответствует невозможному бизнесу, так как соответствующая ему точка на графике (НВ) лежит вне пределов площади, ограниченной линией производственных возможностей.

128. Как показывает график рис. Р.2, для граждан молодого возраста можно будет, оставаясь в пределах эффективного бизнеса, провести 650 мероприятий.

129. Как видно из графика рис. Р.2, это увеличение равно тому количеству, которое приводит на линию производственных возможностей для 750 мероприятий для граждан молодого возраста, т.е. составляет 400 мероприятий для граждан немолодого возраста. Величина сокращения равна

$$600 - 400 = 200 \text{ мероприятий.}$$

130. По данным табл. 4.1 строим график спроса и предложения (рис. Р.3).

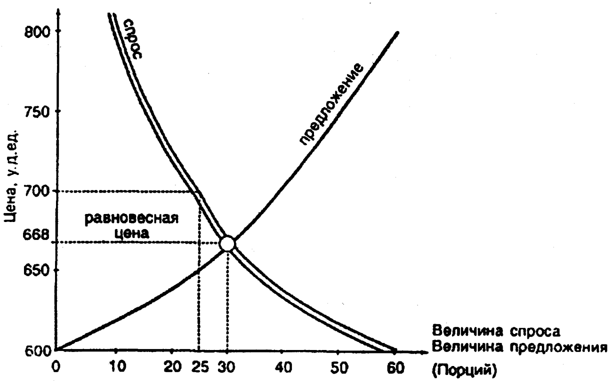

Рис. Р.3

Цена, соответствующая точке на графике, находящейся в пересечении линий спроса и предложения, называется равновесной. В данном случае она равняется 668 у.д.ед. Это та цена, по которой будет осуществляться купля-продажа товара при данных спросе и предложении, которые равны 30 порциям.

Действительно, стоит продавцу увеличить цену товара выше равновесной, например до 700 у.д.ед., как соответствующая ей величина спроса упадет до 25 порций. Но при этом до такой же величины должно будет упасть и предложение, что соответствует цене предлагаемого товара в 650 у.д.ед. Уменьшение цены предлагаемого товара вызовет рост величины спроса, которая будет расти до тех пор, пока не приведет цену в равновесную точку; после равновесной точки дальнейший рост спроса будет ограничиваться падением цены и связанного с ним предложения и т.д.

Таким образом, приход цены в равновесную точку осуществляется путем ее затухающих колебаний около равновесной точки. То же самое произойдет и при первоначальном установлении цены ниже равновесной точки – соответствующие изменения величин спроса и предложения возвратят цену в точку равновесия.

131. Затоваривание появляется в том случае, когда продавец устанавливает цену выше равновесной (рис. Р.4). Образующийся при этом промежуток между линиями спроса и предложения показывает, какое количество предлагаемого продавцом по данной цене товара не обеспечивается спросом покупателя. Это и есть величина затоваривания. Так, к примеру, если начать продавать мороженое по цене 750 у.д.ед. за порцию, то спрос упадет до 17 порций, а предложение вырастет до 50 порций. Разность (50 – 17) и показывает величину затоваривания: 33 порции.

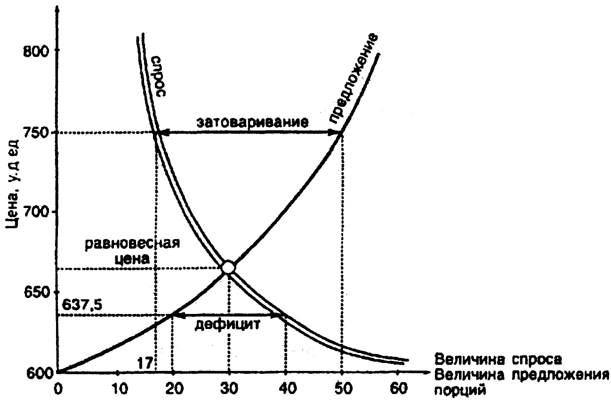

Рис. Р.4

Дефицит появляется в том случае, когда продавец устанавливает цену ниже равновесной (рис. Р.4): образующийся при этом промежуток между линиями предложения и спроса показывает, какого количества товара не хватает, чтобы удовлетворить спрос. Это и есть дефицит. Так, например, если начать продавать мороженое по цене 637,5 у.д.ед., то спрос повысится до 40 порций, а предложение упадет до 20 порций. Разность (40 – 20) и показывает величину дефицита: 20 порций.

132. Построим график бюджетной линии по данным табл. 4.2 (рис. Р.5).

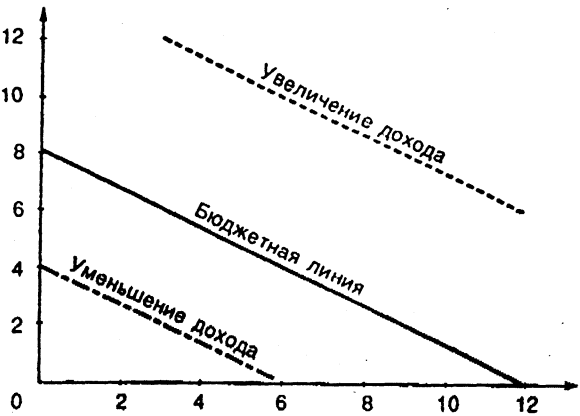

Рис. Р.5

Наклон бюджетной линии зависит от соотношения цен товаров. При этом крутизна линии равна 1 у.д.ед. : 1,5 у.д.ед. = $^2/_3$. Крутизна показывает, от какого количества единиц товара А следует отказаться потребителю, чтобы получить дополнительное количество единиц товара Б. Так, в данном случае потребитель сможет приобрести дополнительно три единицы товара Б, если откажется от двух единиц товара А.

133. Построим график бюджетной линии по данным табл. 4.2 (рис. Р.5).

Нанеся соответствующие бюджетные линии на график рис. Р.5, видим, что при увеличении дохода бюджетная линия смещается вправо, а при уменьшении – влево.

Положение бюджетной линии на графике меняется также и при изменении цен товаров. Если пропорционально меняются цены обоих товаров, бюджетная линия смещается так же, как и при изменении дохода: уменьшение цены равносильно увеличению дохода и наоборот.

134. 1) Стоимость оптимальной партии заказа товара ($П_{опт}$) рассчитывается по формуле:

$$П_{опт} = \sqrt{\frac{2\,Г \cdot С}{И}}, \qquad (*)$$

где Г – годовая стоимость заказа, С – стоимость издержек изготовления партии товара, И – стоимость издержек хранения товара.

$$П_{опт} = \sqrt{\frac{2 \cdot 900 \cdot 10}{0{,}2}} = 300 \text{ млн руб.}$$

Объем партии товара (Об) при этом равен:

$$Об = \frac{300 \cdot 10^6}{10^4} = 30 \text{ тыс. штук.}$$

Графическое решение данной задачи показано на рис. Р.6.

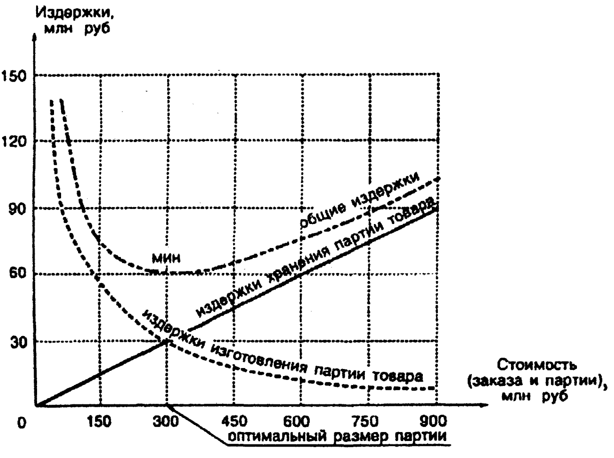

Рис. Р.6. График стоимости оптимальной партии заказа товара

2) С помощью формулы (*) можно построить график для определения стоимости оптимальной партии заказа товара (рис. Р.6).

Из графика наглядно видно, как по мере роста размера (стоимости) партии падают издержки изготовления и растут издержки хранения товара. Интересующие же нас общие издержки ведут себя противоречиво: сначала они падают до некоторого минимума, а затем начинают расти. Точка минимума общих издержек как раз и соответствует оптимальному размеру партии товара.

§ 6. Геометрия

135. Принимая сторону садового участка до увеличения за единицу, получим его периметр равным 4, а площадь – единице. С увеличением периметра на 20 % его стороны также вырастут на 20 % и станут равны 1,2. Площадь при этом станет равна $(1{,}2)^2 = 1{,}44$, т.е. вырастет на 44 %.

136. Принимая сторону садового участка до увеличения за единицу, получим площадь, равную единице. Площадь участка с увеличением сторон на 40 % станет равна: $1{,}4 \cdot 1{,}4 = 1{,}96$, т.е. площадь вырастет на 96 %.

137. Принимая сторону прямоугольного садового участка до увеличения за единицу, получим его площадь, равную единице. С изменением сторон участка его площадь станет равна: $1{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}91$, т.е. уменьшится на 9 %.

138. Поскольку копия легче натуры в 8 миллионов раз и сделана из того же материала, то ее объем должен быть меньше объема натуры тоже в 8 миллионов раз. Но объемы тел относятся как кубы их высот.

Следовательно, копия должна быть ниже натуры в

$$\sqrt{\frac{8\text{ млн м}^3}{1^3}} = 200\text{ раз.}$$

Высота Эйфелевой башни около 300 м, поэтому высота копии должна быть $\frac{300\ \text{м}}{200} = 1{,}5$ м.

139. Поскольку объемы тел относятся как кубы их линейных размеров, большая емкость должна быть в $\sqrt[3]{27} = 3$ раза выше и шире.

Поверхности же подобных тел относятся как квадраты линейных размеров, т.е. поверхность большей емкости в $3^2 = 9$ раз больше, а значит, и в 9 раз тяжелее.

140. Объем меньшего блока будет в $5^3 = 625$ раз меньше. Следовательно, он будет весить $\frac{6{,}25\ \text{т}}{625} = 10$ кг.

141. Возможно. На этот счет существует специальная теорема. Практическое решение данной задачи требует, однако, сложных расчетов.

142. Обозначив через x количество участков, нарезанных в первой части земли, можно записать условия задачи следующим образом:

$$300\,000 = \left(100 \cdot \frac{1000}{x}\right)x + \left(100 \cdot \frac{1000}{x} - 10\,000\right)(x + 15).$$

После преобразований получим:

$$x^2 + 25x - 150 = 0.$$

Решая квадратное уравнение по стандартной формуле, получим:

$$x_{1,2} = -\frac{25}{2} \pm \sqrt{\frac{25^2}{4} + 150} = -\frac{25}{2} \pm \frac{35}{2};$$

$x_1 = 5$ участков (x_2 не подходит, так как отрицательно).

Следовательно,

1) участков, нарезанных в первой части земли, – 5, а во второй – $5 + 15 = 20$;

2) площадь участка в первой части земли равна 2 га, а во второй – 1 га.

143. Обозначая первоначальное количество линий через x, можно представить условие задачи в следующем виде:

$$\left(\frac{180}{x}+3\right)(x+4)=288.$$

После преобразований получим:

$$x^2-32x+240=0.$$

Решая квадратное уравнение по стандартной формуле, получим:

$$x_{1,2}=\frac{32}{2}\pm\sqrt{\frac{32^2}{4}-240}=\frac{32}{2}\pm 4.$$

Задача имеет два решения:

$$x_1=20,\ x_2=12.$$

144. В предвкушении еды нас интересует не ширина яблока, а его объем. Отношение объемов шаров пропорционально отношению кубов их радиусов. В нашей задаче это отношение равно:

$$\frac{\left(1\frac{1}{4}\right)^3}{(1)^3}=\frac{125}{62}\cong 2.$$

Следовательно, по объему первое яблоко больше второго примерно в два раза. А стоит оно всего в 1,5 раза дороже. Значит, первое яблоко купить выгоднее.

145. Из тех же соображений, что и в решении задачи 144, отношение объемов яиц второго и первого видов равно:

$$\left(\frac{18}{15}\right)^3=1{,}73.$$

Следовательно, яйца второго вида выгоднее.

Уместно отметить, что соображения, высказанные при решении двух последних задач, справедливы и по отношению к любым другим фруктам или овощам шарообразной или близкой к ней формы: чем они крупнее, тем выгоднее.

146. Для решения задачи вообразим, что диаметр крупинок муки крупного помола больше, чем мелкого, скажем, в 10 раз. Увеличим мысленно крупинки мелкой муки до размера крупинок крупной. Одновременно увеличим во столько же раз и размер мешка. Тогда его объем вырастет в $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ раз. Во столько же раз увеличится и вес муки. И если мы теперь отсыпем из этого огромного мешка один обычный мешок, то он составит одну тысячную веса большого мешка. Но ведь это и будет мешок муки крупного помола. И вес его окажется точно таким же, как и у мешка муки мелкого помола. Следовательно, одинаковые по объему мешки муки мелкого и крупного помола равны и по весу.

147. Обозначим диаметр мяча Д. Тогда длина опоясывающей его веревки будет равна πД, а после увеличения этой длины на один метр – πД + 1.

Между диаметром и длиной окружности существует следующая зависимость:

$$Д_1 = \frac{О_1}{\pi};\ Д_2 = \frac{О_2}{\pi} = \frac{О_1 + 1}{\pi},$$

где $Д_1$, $Д_2$ и $О_1$, $О_2$ – диаметры окружности и ее длина до и после увеличения.

Приращение диаметра окружности составит:

$$\Delta Д = Д_2 - Д_1 = \frac{О_1 + 1}{\pi} - \frac{О_1}{\pi} = \frac{1}{\pi} = 0{,}318\,\text{м}.$$

При этом зазор между веревкой и шаром вырастает на величину, в два раза меньшую (ибо приращению диаметра соответствуют два таких зазора по обе стороны шара).

Произведенный расчет, как это ни покажется странным, говорит о том, что возникающий при увеличении длины веревки зазор совершенно не зависит от диаметра шара и связан лишь с удлинением веревки: и для мяча, и для Земли он равен $\frac{0{,}318}{2}$ м.

148. Всегда: через три точки всегда можно провести плоскость.

149. Бриллиант весом в 4 карата стоит:

$$1000\left(\frac{4}{1}\right)^2 = 16\,000 \text{ у.д.ед.}$$

Это соответствует стоимости натурального рубина в x карат:

$$16\,000 = 2000\left(\frac{x}{1}\right)^3.$$

Откуда $x^3 = \dfrac{16\,000}{2000} = 8.$

$$x = 2 \text{ карата.}$$

150. Обозначим через x количество участков для субаренды. Тогда выручка за субаренду составит $8x$, годовой заработок будет равен $^{72}/_{x} \cdot 4$ и условие задачи запишется так:

$$8x - 72 = {}^{72}/_{4} \cdot 4.$$

После преобразований:

$$8x^2 - 72x - 288 = 0,\ \ x^2 - 9x - 36 = 0.$$

Решая квадратное уравнение по стандартной формуле, получим:

$$x_{1,2} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{9^2}{4} + 36} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{225}{4}} = \frac{9}{2} \pm \frac{15}{2};$$

$x_1 = 12$ (x_2 не подходит, так как отрицательно).

Следовательно: 1) количество участков равно 12; 2) прибыль арендатора равна $12 \cdot 8 - 72 = 24$ тыс. у.д.ед.

151. Составляем систему уравнений (где x и y – стороны параллелограмма):

$$\left.\begin{aligned} x + y &= \frac{4000}{2}, \\ S &= x \cdot 400 = y \cdot 1200. \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Решая систему уравнений (*), получим:

$$y = 2000 - x;\ \ 400x = (2000 - x) \cdot 1200.$$

$$x = 1500.$$

$$S = 400 \cdot 1500 = 600\ 000\ м^2 = 0{,}6\ км^2.$$

§ 7. *Логические задачи и задачи на смекалку*

152. Можно обойтись всего двумя взвешиваниями:

первое: положить на каждую чашку весов по 3 любых монеты; если монеты уравновесятся, значит, фальшивая в оставшейся тройке; если одна из чашек окажется легче – искомая монета в ней;

второе: из тройки монет, в которой обнаружена фальшивка, две любые монеты разложить по чашкам весов; если монеты уравновесятся, значит, фальшивая – оставшаяся; если одна из монет окажется легче, значит, она и есть фальшивая.

Итак, взвешивание обойдется в 200 у.д.ед.

153. Один делит пополам, второй выбирает свою часть. (Кто делит, а кто выбирает, определяется по жребию.)

154. Четыре брата и три сестры.

155. Обозначая через А и П стоимости автомобиля и прицепа, получим следующие очевидные равенства:

$$А + П = 1{,}5\ млн\ у.д.ед.$$

$$А - П = 1{,}3\ млн\ у.д.ед.$$

Складывая левые и правые части равенств, получим:

$$2А = 2{,}8\ млн\ у.д.ед.$$

Следовательно, А = 1,4 млн у.д.ед., П = 0,1 млн у.д.ед.

156. Проще всего решить эту задачу так. Мысленно включим в раздел еще один, восемнадцатый автомобиль. Тогда договорные доли от 18 автомобилей составят:

для участника А – 9 автомобилей,

для участника Б – 6 автомобилей,

для участника В – 2 автомобиля.

В сумме это и будет 17 автомобилей. Такой раздел не совсем точен, но понятен и по-своему справедлив.

157. 1 каменщик выложит 2 м стены за 4 часа,
1 каменщик выложит 1 м стены за 2 часа,
1 каменщик выложит 5 м стены за 10 часов,
2 каменщика выложат 5 м стены за 5 часов.

158. 9 часов.

159. Наливаем в соответствующую емкость ровно 8 л вина, из которой отливаем в 5-литровую ровно 5 (при этом в 8-литровой емкости остается ровно 3 л). Из 5-литровой емкости вино переливаем в 12-литровую и в освободившийся сосуд наливаем оставшиеся в 8-литровой емкости 3 л. Снова из 12-литровой заполняем вином 8-литровую емкость, из которой заливаем доверху 5-литровую (в которой уже есть 3 л). При этом в 8-литровой емкости остается ровно 6 л.

160. Жидкость из пятой емкости перелить во вторую.

161. Первоначальное количество зеленой краски обозначим через x, тогда количество желтой будет $1 - x$. После добавления $1 - x$ зеленой и x желтой краски количество краски разных цветов уравнялось (стало равным по 1). Следовательно, по 50 % краски каждого цвета.

162. $81 + {}^{81}/_{9} + {}^{9}/_{9} = 91$ коронку.

163. Обозначим количество участников деловой встречи через x. Тогда количество договоров, заключенных каждым из участников, будет $x - 1$ (исключается договор с самим собой). А всего договоров на встрече было заключено $x\,(x - 1)$. Но эти договоры должны быть парными (на двух участников – один договор).

Поэтому фактически договоров будет в два раза меньше:

$$\frac{x(x-1)}{2}.$$

Следовательно, $\dfrac{x(x-1)}{2} = 105$, откуда $x = 15$.

164. В момент выезда железнодорожного состава из Москвы в пути находятся 8 встречных составов, в том числе один входящий в этот момент в Москву и один – выходящий из Владивостока. Все эти 8 составов будут встречными. Но этого мало. За те 7 дней, что москвичи будут в пути, из Владивостока успеет выйти еще 7 составов (в том числе один – в момент прихода московского поезда во Владивосток). Итого 8 + 7 = 15 составов, т.е. письма могут быть получены 15 раз.

165. Обозначая среднюю скорость автомобиля через x, а расстояние меду городами – l, можем написать, чему будет равно время, затраченное на поездку туда и обратно:

$$\text{Время } \frac{2l}{x} = \frac{l}{60} + \frac{l}{40},$$

откуда $x = 48$ часов.

166. 150 т.

167. Отличаются: скорости оборота капитала, цены товара, расходы на хранение (поддержание) товара. Совпадать должна норма прибыли (прибыль за определенное время). Иначе необходимо менять товар.

168. 1000 у.д.ед. стоит 1 кг орехов или 400 г ядер. Следовательно, 1 кг ядер должен стоить в 2,5 раза ($\frac{1000}{400}$) дороже, т.е. 2500 у.д.ед.

Значит, выгоднее покупать неочищенные орехи.

169. Рубль никуда не подевался. Просто к 27 руб. надо прибавить не 2, а все 3 руб.

170. 500 : $^1/_2$ = 1000 руб.

171.

$$\begin{array}{r} 11000 \\ 1100 \\ \underline{11} \\ 12111 \end{array} \text{ руб.}$$

172. Если принять мое состояние за единицу, то его половина – $^1/_2$ равна $^1/_3$ вашего. Следовательно, ваше состояние равно $^1/_2 \cdot 3 = 1^1/_2$. То есть вы богаче меня в 1,5 раза.

173. Одинаково и равно 3,5 доллара.

174. Запятую.

175. Килограмм гривенников: килограмм любого металла всегда дороже, чем полкилограмма этого же металла.

176. Волос на голове человека в среднем не менее 200 000. Следовательно, их общая длина равна:

1 мм · 200 000 = 200 м.

177. Если считать по 10 часов в день – 76 лет, если круглосуточно, без перерыва, – примерно 31 год.

178. Выгоднее нанять строителей: если Иванов станет строить дом сам, это ему обойдется в две месячные зарплаты, т.е. в 1,5 млн у.д.ед.

179. Обозначим сестер начальными буквами их имен: А, Б и В.

Племянника Анны обозначим $А^1$, сына Беллы – $Б^1$, мужа Веры – $В^1$.

Из условия задачи следует, что в деле участвуют шесть человек – А, Б, В, $А^1$, $Б^1$, $В^1$ и прибыль в 44 млн у.д.ед. нужно разделить между ними поровну так, чтобы у каждого она выражалась целым числом миллионов у.д.ед. Поскольку это невозможно (44 не делится на 6 без остатка), напрашивается единственное допустимое решение: владельцев капитала должно быть столько, чтобы 44 млн делилось между ними без остатка.

Условие задачи предоставляет такую возможность. Для этого следует лишь предположить, что $А^1$ не только племянник А, но одновременно и сын Б, и муж В. Иными словами, $А^1$, $Б^1$, $В^1$ – одно и то же лицо. И прибыль следует делить между четырьмя акционерами:

$$^{44}/_{4} = 11 \text{ млн у.д.ед.},$$

что отвечает условию задачи.

180. 1) Обещание было дано в понедельник.

2) Деньги будут отданы в ближайшую пятницу.

181. Оказывается, это довольно просто.

Дело в том, что, к счастью аудитора, суммы цифр в обоих слагаемых оказались кратны 9, а значит, слагаемые делятся на 9. Естественно, делились на 9 они и до перестановки в них цифр.

При сложении же чисел, делящихся на 9, сумма также делится на 9. Это означает, что сумма цифр результата сложения должна быть кратна 9. Сложив цифры суммы (кроме подделанной), получим 30. Ближайшее большее число, кратное 9, это 36. Нам не хватает 36 – 30 = 6. Следовательно, исправленная цифра – это 6.

182. 1) Обозначим через О, М и Д возраст отца, матери и дочери в момент заключения страхового договора. При этом условие задачи математически запишется так:

$$О + М + Д = 46 \qquad (1)$$

(в момент заключения договора),

$$\frac{О}{Д} = 12 \qquad (2)$$

(в момент заключения договора),

$$Д + М = \frac{О + М}{2} \qquad (3)$$

(в момент выплаты страховой премии – через М лет).

Из (2) следует, что О = 12 Д.

Подставляя значение О в (3), получим:

$$Д + М = \frac{12Д + М}{2}; \quad М = 10Д.$$

Подставляя значение О и М в (1), получим:

$$12Д + 10Д + Д = 46,$$

откуда Д = 2 года,

О = 12Д = 24 года,

М = 10Д = 20 лет.

2) Страховая премия должна быть выплачена через М = 20 лет после заключения договора.

183. Отставание моих часов от часов сослуживца = опережение часов сослуживца точного времени + отставание моих часов от точного времени =

$$= \frac{12\text{ мин}}{24\text{ ч}} + \frac{3 \cdot 12\text{ мин}}{24\text{ ч}} = 0{,}5 + 1{,}5 = 2\text{ мин/ч}.$$

Время, прошедшее с момента постановки до сверки часов =

$$= \frac{\text{на сколько отстали мои часы от часов сослуживца за время от постановки до сверки}}{\text{отставание моих часов от часов сослуживца}} =$$

$$= \frac{\text{три четверти часа}}{2\text{ мин/ч}} = \frac{45\text{ мин}}{2\text{ мин/ч}} = 22{,}5\text{ ч}.$$

184. В месте встречи они будут на одинаковом расстоянии от Санкт-Петербурга.

185. Чаще всего люди устанавливают на замках дату дня своего рождения, а она не может быть более 31 (числа дней в месяце).

186. Шесть.

187. Все зависит от того, сколько всего предприятий. Если предприятий много, то А, естественно, лучше. А если предприятий всего два, то А может быть из них вторым (т.е. одним из первых), а Б – первым (т.е. предпоследним). Следовательно, в этом случае А хуже, чем Б.

188. Как и все составные критерии, "показатель Толстого" не дает возможности определить, за счет чего человек хорош: то ли он действительно много стоит, то ли низко себя оценивает. У умного, но знающего себе цену работника показатель может получиться ниже, чем у глупого, но скромно себя оценивающего.

189. Все дело в том, что люди подошли к реке на разных берегах: сначала переправится один, затем в противоположном направлении – другой.

190. Что должен быть еще один конец.

191. "Лучший портной на этой улице".

192. Нельзя заранее точно определить, какую сторону бутерброда следует намазать маслом.

193. Население растет.

194. Пристрастие к холостяцкой жизни.

195. 19.

196. Цикл повторяется.

197. Один месяц.

198. Отсутствие проверок их качества.

199. Попросят сделать еще раз.

200. Нет, по их словам, “было хуже”.

201. Соглашаться.

202. “...ты делаешь плохо”.

203. Мать.

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

(Необходимые пояснения к задачам см. в главе 3)

§ 1. Методы оптимизации: линейное, нелинейное и динамическое программирование (планирование)

204. Все расчеты будем производить, исходя из общей продолжительности времени работы в 6 ч = 360 мин (одна смена). Попробуем на все это время загрузить станок № 1 деталями А. Станки № 2 и № 3 также загрузим на все время работы, но деталями Б. Результат такого глазомерного решения изобразим следующим образом: слева от вертикальной черты покажем время загрузки станков по различным деталям, а справа – соответствующее количество произведенной продукции (произведение времени работы на минутную производительность):

Станок	Продолжительность работы станка, мин		Производительность станка (количество деталей за время работы)	
	А	Б	А	Б
№ 1	360	0	1800	0
№ 2	0	360	0	720
№ 3	0	360	0	1080
			1800 +	1800 =
Общее количество выпущенной продукции			3600 деталей	

Глазомерное решение полностью отвечает поставленным условиям: во-первых, все станки полностью загружены в течение рабочего времен; во-вторых, количество произведенных деталей

А равно количеству деталей Б. Остается, однако, открытым главный вопрос планирования: является ли наше глазомерное решение наилучшим в данных условиях? Нельзя ли составить другой план распределения станков, который отличался бы от глазомерного наибольшей производительностью?

Обоснованием такого оптимального решения занимается математическое программирование. Суть метода удобнее всего выразить с помощью наглядного геометрического представления, графика (рис. Р.7). Здесь показан построенный по правилам математического программирования многоугольник *OABCD* (он заштрихован). Многоугольник соответствует условиям нашей задачи и представляет собой область допустимых планов распределения времени работы станков № 2 и № 3 над деталью А. По соответствующим осям графика отмечена продолжительность работы этих станков. (В своих расчетах мы вполне можем обойтись двумя станками и одной деталью, так как по этим данным нетрудно рассчитать и все остальные.)

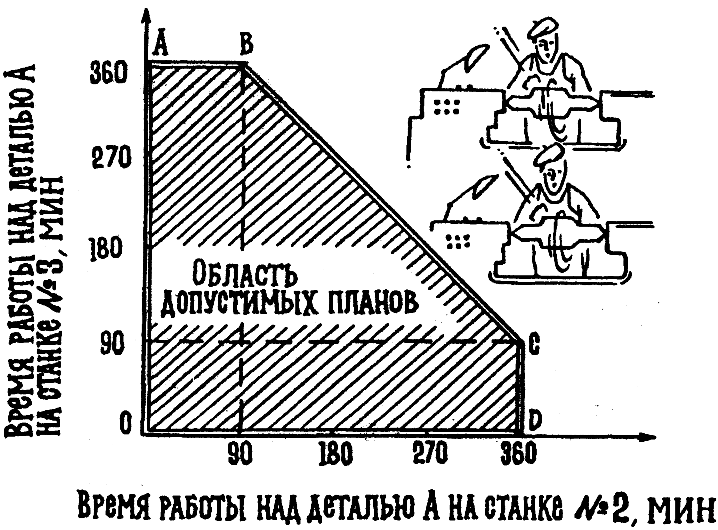

Рис. Р.7. График решения станковой задачи

Любая точка заштрихованной области допустимых планов, как видно из названия, даст нам какой-либо один возможный план, отвечающий обоим принятым условиям – ограничениям. Так, например, точка *O* соответствует нашему глазомерному плану: время работы над деталью А на станках № 2 и № 3 равно нулю.

В поисках наилучшего плана посмотрим, какой план распределения станков дает другие точки области. Вот, скажем, точка *B*. Как видно из графика, этой точке соответствует время работы над деталью А станка № 2, равное 90 мин, станка № 3 – 360 мин. По этим данным нетрудно составить второй план распределения станков, причем время, отводимое на производство детали Б станками № 2 и № 3, получится как дополнение до 360 мин времени, снятого с графика, – станки не должны простаивать. Что касается станка № 1, то его время работы подбирается таким, чтобы общее количество деталей А и Б совпадало.

Второе решение, следовательно, будет выглядеть так:

Станок	Продолжительность работы станка, мин		Производительность станка (количество деталей за время работы)	
	А	Б	А	Б
№ 1	0	360	0	1800
№ 2	90	270	540	540
№ 3	360	0	1800	0
			2340 +	2340 =
Общее количество выпущенной продукции			4680 деталей	

Вот так результат! Мы сразу же, можно сказать бесплатно, на том же оборудовании увеличили производительность на 1080 деталей, т.е. на целых 30 %.

Нас, однако, продолжает мучить законный вопрос – добились ли мы уже самого лучшего, оптимального решения, или нет? Стоит ли дальше пытаться улучшить план?

В теории математического программирования убедительно показывается, что оптимальному решению соответствует одна из вершин многоугольника допустимых планов, а именно та, для которой общая производительность окажется максимальной. В нашем случае это вершина *C*.

Действительно, рассчитывая известным уже нам путем план распределения станков для этой точки, получим следующее решение:

Станок	Продолжительность работы станка, мин		Производительность станка (количество деталей за время работы)	
	А	Б	А	Б
№ 1	0	360	0	1800
№ 2	360	0	2160	0
№ 3	90	270	430	810
			2610 +	2610 =
Общее количество выпущенной продукции			5220 деталей	

Мы получили план почти наполовину (на 45 %) лучше, чем глазомерный. И этот существенный прирост, подобно предыдущему улучшению, ничего (если не считать умственных усилий на планирование) не стоит. Никакого дополнительного расхода каких-либо ресурсов не потребовалось. Те же станки, те же детали, те же станочники работают то же время. Не меняются и производительности станков. Эффект здесь чисто интеллектуальный, “умственный” – за счет рационального распределения ресурсов оборудования (кстати, слово латинского происхождения “рациональный” означает разумный). Умное, обоснованное решение сделало чудо, в которое даже трудно поверить. Подобный “чудесный” результат, как мы уже понимаем, характерен для всех решений, принимаемых с помощью научных методов.

205. Как будет проходить подбор кандидатов на должности? Сделаем это сначала на глаз.

Первый по алфавиту кандидат А лучше всего отвечает должности V. Закрепим за ним эту должность, поставив в правом верхнем углу соответствующей клетки звездочку.

Следующего кандидата Б лучше всего было бы назначить на должность V, но она уже занята. Поэтому направим его на наиболее подходящую из оставшихся – должность I. И так далее.

Оценку полученного штатного расписания произведем так, как мы это делали в задачах математического программирования, – суммируя оценки соответствующих назначений:

$$60 + 40 + 50 + 20 + 10 = 180.$$

Хорошее ли это расписание? Ответить на такой вопрос можно, лишь зная оптимальный вариант. Получить его путем сплошного перебора всех возможных расписаний, как мы уже знаем, практически нельзя: при распределении всего 10 кандидатов по 10 должностям число возможных вариантов измеряется миллионами.

Существуют, к счастью, приемы направленного перебора вариантов, построенные на основе методов исследования операций. Применение этих приемов выводит на следующее оптимальное штатное расписание:

Кандидаты	Должности				
	I	II	III	IV	V
А				*	
Б					*
В	*				
Г		*			
Д			*		

Оценка качества данного расписания:

$$40 + 80 + 80 + 70 + 60 = 330.$$

Оценка показывает, что оптимальное расписание почти в два раза лучше, чем глазомерное.

206. Прежде всего нужно установить все возможные способы раскроя наших листов по требуемым заготовкам (рис. Р.8). Начнем с того, что постараемся получить с одного листа как можно больше заготовок А – они крупнее, чем Б, и для них труднее подыскать место на листе. Оказывается, однако, что более трех заготовок А с листа выкроить невозможно. Исходя из этого, предусмотрим способы раскроя для получения трех, двух и одной заготовки А и наибольшего возможного количества заготовок Б с листа. Каждому способу дадим номер:

способ № 1: 3 заготовки А и 1 заготовка Б;

способ № 2: 2 заготовки А и 6 заготовок Б;

способ № 3: 1 заготовка А и 9 заготовок Б.

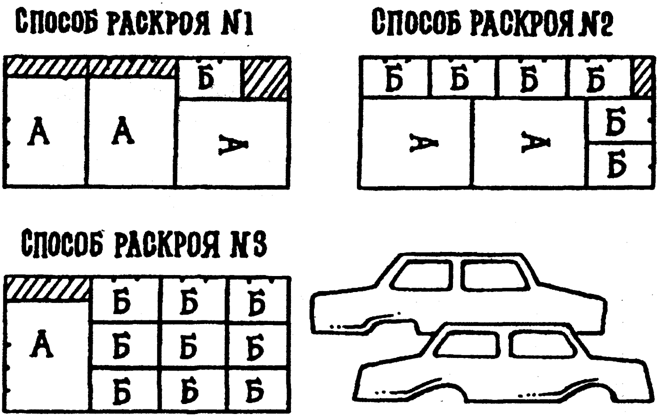

Рис. Р.8. Способы раскроя материала

Заметим, что при всех способах раскроя часть площади листа остается неиспользованной и идет в отходы. На рисунке эта площадь заштрихована.

Для составления оптимального плана раскроя материала построим график, подобный тому, который мы рисовали в задаче со станками. На рис. Р.9 по оси x отложено количество заготовок А, а по оси y – число заготовок Б. При этом каждому способу раскроя соответствует своя точка на графике. Так, точка “способ № 2” стоит на пересечении двух заготовок А и шести заготовок Б. Точки – способы раскроя – указывают границы области допустимых планов.

Для того чтобы обеспечить комплектность заготовок, необходимо ограничиваться лишь теми точками области допустимых планов, которые лежат на луче *ОЛ*. Он построен таким образом, что все его точки соответствуют требуемому отношению заготовок А и Б:

$$\frac{\text{число заготовок А}}{\text{число заготовок Б}} = \frac{1}{5}.$$

Какой же план раскроя наиболее рационален?

Очевидно, тот, которому соответствует точка, наиболее отдаленная от начала координат, – ведь при этом число заготовок будет наибольшим. Этот план дает точка, лежащая на пересечении луча *ОЛ* с границей области допустимых планов – линией, соединяющей способы № 2 и № 3. Она находится как раз посередине между упомянутыми способами. Итак, оптимальный план раскроя заключается в том, что половина листов кроится способом № 2, а половина – способом № 3.

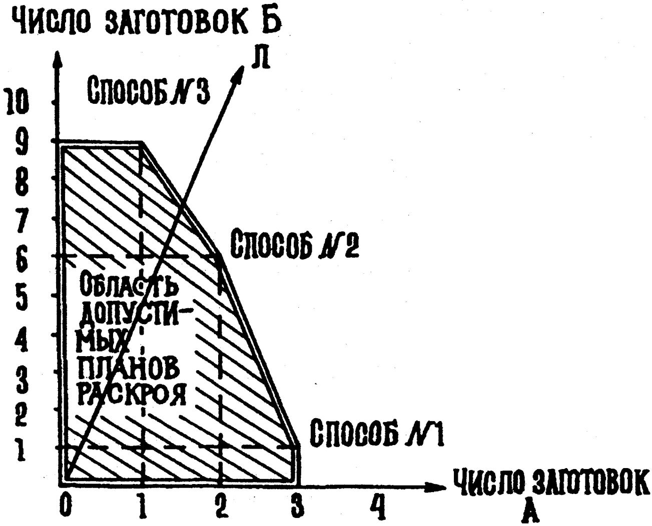

Рис. Р.9. График раскроя материала

Проверим теперь наш оптимальный план на партии в 200 листов. Половину – 100 листов – раскроим по способу № 2 и получим 100 · 2 = 200 заготовок А и 100 · 6 = 600 заготовок Б; вторую половину листов раскроим по способу № 3. Получим 100 · 1 = 100 заготовок А и 100 · 9 = 900 заготовок Б. Всего же получилось 300 заготовок А и 1500 заготовок Б – комплектность 1 к 5 соблюдена. А чем этот план лучше других? На этот вопрос ответят следующие любопытные цифры.

Предположим, что тот, кто ведет раскрой, не знает современных методов обоснования решений и действует без расчета, на глазок. Не исключено, что он станет раскраивать наши 200 листов способами № 1 и № 3. Для того чтобы иметь возможность сравнивать глазомерный план с оптимальным, примем, что способом № 1 раскраивалось 50, а способом № 3 – 150 листов. Вот что при этом получается:

50 листов, раскроенных по способу № 1, дают

$50 \cdot 3 = 150$ заготовок А и $50 \cdot 1 = 50$ заготовок Б;

150 листов, раскроенных по способу № 3, дают

$150 \cdot 1 = 150$ заготовок А и $150 \cdot 9 = 1350$ заготовок Б.

Всего получается 300 заготовок А и 1400 заготовок Б.

А куда же исчезли 100 заготовок Б? Ведь при оптимальном раскрое их было 1500. Их "съел" плохой план. Все они ушли в отходы. Дефицитный материал остался неиспользованным.

Таким образом, рациональный раскрой даже в такой скромной задаче, как наша, – разрезается всего 200 листов – экономит 600 м^2 дефицитного материала: 100 заготовок Б $\cdot$ 2 м $\cdot$ 3 м = 600 м^2.

207. В этом случае в дополнение к трем способам раскроя, рассмотренным в задаче 206, появится четвертый способ, при котором на листе может разместиться 13 заготовок только одного вида (рис. Р.10).

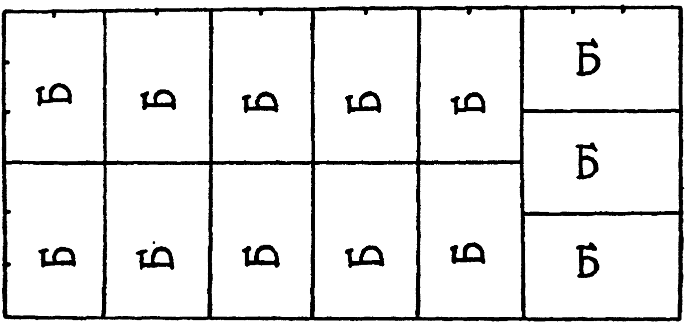

Рис. Р.10. Способ раскроя № 4

На графике (рис. Р.11) появляется точка, соответствующая этому способу раскроя. Как видно из этого рисунка, оптимальный план раскроя представляет сочетание примерно $^3/_4$ листов, раскраиваемых по способу № 2, и $^1/_4$ – по способу № 4. Приведем точный расчет по данному варианту раскроя. Обозначая через x долю листов, раскраиваемых по способу № 2, можно написать:

$$\text{число заготовок А} = 2x + 0\,(1 - x),$$
$$\text{число заготовок Б} = 6x + 13\,(1 - x).$$

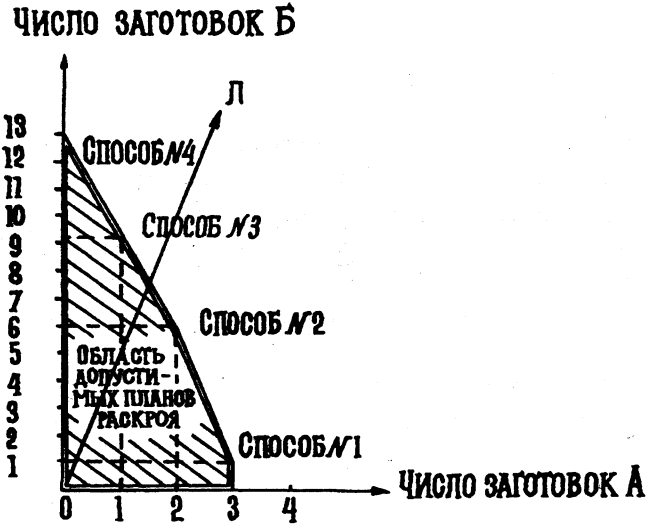

Рис. Р.11

Здесь $2x$ – число заготовок А при способе № 2, а $0\,(1 - x)$ – число заготовок А при способе № 4;

$6x$ – число заготовок Б при способе № 2, а $13\,(1 - x)$ – число заготовок Б при способе № 4.

С другой стороны, известно, что

$$\frac{\text{число заготовок А}}{\text{число заготовок Б}} = \frac{1}{5}.$$

Следовательно,

$$\frac{2x}{6x + 13(1 - x)} = \frac{1}{5},$$

откуда $x = 0{,}764$.

Итак, по способу № 2 следует раскраивать $0{,}764 \cdot 200 = 153$ листа, а по способу № 4 – $200 - 153 = 47$ листов. Это даст $153 \cdot 2 = 306$ заготовок А и $153 \cdot 6 + 47 \cdot 13 = 1529$ заготовок Б, т.е. 305 полных комплектов.

208. Обозначая через x_1 и x_2 дневные нормы продуктов М и Н соответственно, можно по условию задачи составить следующие неравенства:

Условие жирности: $14x_1 + 4x_2 \leq 4$. (1)

Условие калорийности: $150x_1 + 200x_2 \geq 200$. (2)

При этом очевидно, что $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Требование минимизации расходов может быть записано так:

$1{,}5x_1 + 2{,}5x_2$ – как можно меньше. (3)

Соотношения (1), (2) и (3) могут быть наглядно показаны на графике (рис. Р.12).

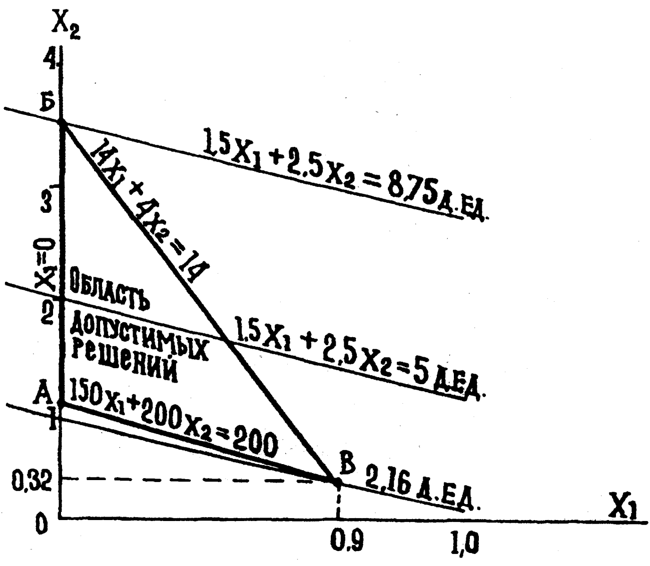

Рис. Р.12

Оптимальное решение о рационе соответствует точке B на графике, полученной при совместном решении неравенств (1) и (2). Этой точке соответствует:

дневное количество продукта M, равное 0,9 кг,

и дневное количество продукта H, равное 0,32 кг.

Стоимость дневного рациона будет при этом минимальной и составит 2,16 у.д.ед.

209. Рассмотрим вертикальную организацию каналов распределения товаров (рис. P.13). В этом случае, как упоминалось, распределение товаров осуществляется не в интересах отдельного производителя товара, а системы в целом: принимается такое распределение, при котором суммарная прибыль обоих производителей будет максимальной. Для нахождения такого распределения (оно называется оптимальным) используются специальные методы, рассмотренные в соответствующей главе данной книги. В простейших задачах рассматриваемого типа решение может быть получено и на глаз, путем подбора. На рис. 5.1 показано такое оптимальное распределение. Величина суммарной прибыли обоих производителей товаров равна:

общая прибыль производителей товаров A и Б =

$$50 \cdot 16 + 0 \cdot 10 + 10 \cdot 8 + 0 \cdot 12 + 30 \cdot 18 + 10 \cdot 6 = 1480.$$

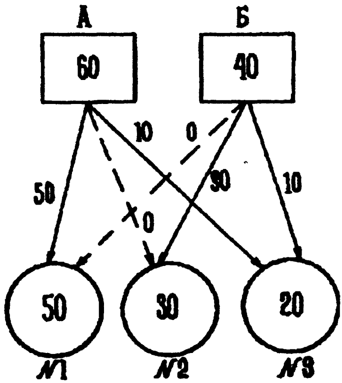

Рис. P.13. Вертикальная организация каналов распределения

Это существенно (на 35 %) больше, чем суммарная прибыль при горизонтальном распределении (620 + 480 = 1100).

Разделив полученную при вертикальном распределении общую прибыль пополам $\left(\frac{1480}{2}\right)$, получим 740 единиц, что значительно больше, чем прибыль "победителя" при горизонтальном распределении товара (740 – 620 = 120).

§ 2. Теория вероятностей и математическая статистика

210. В соответствии с теорией статистических решений среднеожидаемая прибыль равна:

при вложении капитала в кинофильм

$$90 \cdot 0{,}2 + 10 \cdot 0{,}8 = 26\ \%;$$

при вложении капитала в торговлю

$$30 \cdot 0{,}7 + 20 \cdot 0{,}3 = 27\ \%.$$

Следовательно, выгоднее вкладывать капитал в торговлю.

211. Расчет производится по формуле теории вероятностей:

$$N = \frac{\lg(1 - P_{уд})}{\lg(1 - P_{в})},$$

где N – требуемое количество билетов, из которых хотя бы один (не менее одного) выиграет, $P_{уд}$ – вероятность удачи – выигрыша хотя бы одного из купленных билетов, $P_{в}$ – вероятность выигрыша в лотерею на 1 билет.

$$N = \frac{\lg(1-0{,}70)}{\lg(1-0{,}01)} = \frac{\lg 0{,}30}{\lg 0{,}99} = \frac{1{,}4771}{1{,}9956} = \frac{-0{,}5229}{-0{,}0044} \approx 119 \text{ билетов.}$$

212. 80 % – 20 % – 40 % = 20 %.

213. По формуле из теории вероятностей вероятность того, что купленный фирмой прибор проработает весь гарантийный срок без поломок, равна:

$$P = 0{,}6 \cdot 0{,}9 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}1 \cdot 0{,}6 = 0{,}84, \text{ или } 84\ \%.$$

214. Интуиция здесь вас почти наверняка подведет. Расчет сводится к тому, что нужно перемножить число сомножителей, равное числу человек в группе. Первый сомножитель равен $^{365}/_{365}$ (по числу дней в году), второй $^{364}/_{365}$, третий $^{363}/_{365}$ и т.д. В итоге перемножения получается весьма значительная вероятность: для сорока человек около 89 %. Этот расчет, кстати, несложно проверить, опросив о днях рождения группу из 40 человек.

215. Явление, называемое “законом парности”, действительно существует. В основе его – теория вероятности. Суть заключается в том, что вероятность совпадения однотипных и связанных между собой событий оказывается достаточно значительной, во всяком случае, намного большей, чем кажется на первый взгляд. Это-то необычное совпадение и называют “законом парности”. Примером проявления этого закона может служить совпадение дней рождения у двух людей (см. задачу 214); так, вероятность того, что двое из 50 человек родились в один и тот же день и месяц года (парно), весьма значительна и достигает 97 %. Событие со столь высокой вероятностью почти наверняка произойдет, удивив окружающих и заставив их вспомнить о “законе парности”.

216. Встреча двух людей, затерянных в огромном мире, возможна. Она значительно вероятнее, чем кажется на первый взгляд. Дело в том, что на возможность такой встречи влияет сразу несколько различных факторов, действующих в общем направлении. Вероятности этих факторов суммируются (0,1 + 0,3 + 0,2 = 0,6), и шансов на встречу оказывается тем больше, чем больше у вас знакомых, чем чаще они попадаются на вашем пути, чем чаще вы появляетесь на людях, чем дольше вы ждете этой встречи и т. д. В итоге вероятность получается довольно значительной, и встреча, на удивление, может состояться.

217. "Законы подлости", увы, имеют под собой почву. Дело в том, что те события, которые нас интересуют и ради появления которых мы стараемся, как правило, имеют меньшие вероятности, чем те события, которые нам "даром не нужны". Это объясняется тем, что любое человеческое свершение требует определенной организованности и связанных с ней многообразных разносторонних усилий, вероятности которых умножаются. В итоге общая вероятность оказывается меньше, чем вероятность каждой составляющей в отдельности ($0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}12$). Эта-то малая вероятность "подло не дает" получить нужный результат.

Что касается пресловутого бутерброда, то его падение "маслом вниз" лишь означает, что предоставленные самим себе, события идут не так, как нам хотелось бы. Как гласит один из "законов подлости", "предоставленные самим себе события развиваются от плохого к... худшему".

В качестве общего результата по задачам 214–217 выступает то, что наша интуиция проявляется в них не лучшим образом. При этом вероятности интересующих нас событий преуменьшаются, и поэтому реальный результат – появление якобы маловероятного события – вызывает удивление.

Резонно высказать предположение, что преуменьшение вероятностей ожидаемых явлений – одна из характерных закономерностей принятия решений.

218. Среднеожидаемое значение (математическое ожидание) прибыли (X) рассчитывается как сумма математических ожиданий прибыли. Ожидаемая прибыль находится как произведение величины предполагаемой прибыли на ее вероятность. Необходимые для этого вероятности находятся, как показано в примере 3.12.

При вложении капитала в объекты типа А:

общее число случаев равно 40 + 20 + 15 = 75;

$$X = 15 \cdot \frac{40}{75} + 20 \cdot \frac{20}{75} + 25 \cdot \frac{15}{75} = 18{,}35 \text{ млн у.д.ед.}$$

При вложении капитала в объекты типа Б:
общее число случаев равно 60 + 48 + 36 = 144;

$$X = 12 \cdot \frac{60}{144} + 16 \cdot \frac{48}{144} + 24 \cdot \frac{36}{144} = 16{,}32 \text{ млн у.д.ед.}$$

Объекты типа А оказываются предпочтительнее, так как сулят более высокую среднеожидаемую прибыль.

219. Средняя ожидаемая прибыль (математическое ожидание прибыли) равна:

– по первому проекту $0{,}4 \cdot 15 + 0{,}6 \cdot (-2) = 4{,}8$ млн у.д.ед.;

– по второму проекту $0{,}5 \cdot 10 + 0{,}5 \cdot (-8) = 1$ млн у.д.ед.

Следовательно, с точки зрения ожидаемой прибыли значительно (почти в 5 раз) выгоднее первый проект.

220. Для первого проекта различие в вероятностях прибыли и убытка составляет:

$$\frac{0{,}6 - 0{,}4}{0{,}4} = 0{,}5, \text{ или } 50\,\%.$$

Для второго проекта это различие равно:

$$\frac{0{,}5 - 0{,}5}{0{,}5} = 0.$$

Следовательно, с точки зрения меньшего различия в возможностях прибыли и убытка лучше выглядит второй проект.

221. По сравнению с первым проектом во втором проекте вероятность получения прибыли вырастает на

$$\frac{0{,}5 - 0{,}4}{0{,}4} = 0{,}25, \text{ или } 25\,\%,$$

в то время как величина прибыли падает на

$$\frac{15 - 10}{15} = 0{,}33, \text{ или } 33\,\%.$$

Поскольку вероятность прибыли во втором проекте по сравнению с первым растет значительно медленнее, чем падает ее величина, предпочтительнее первый проект.

222. По сравнению с первым проектом во втором проекте вероятность получения убытка уменьшается на

$$\frac{0{,}5-0{,}4}{0{,}4}=0{,}25, \text{ или } 25\,\%,$$

в то время как величина убытка растет на

$$\frac{8-2}{2}=3, \text{ или } 300\,\%.$$

Поскольку вероятность убытка во втором проекте по сравнению с первым уменьшается намного медленнее, чем растет его величина, значительно предпочтительнее первый проект.

223. Для первого проекта соотношение возможных прибылей и убытков составляет $^{15}/_{2}$, т.е. на 1 млн у.д.ед. возможного убытка приходится 7,5 млн у.д.ед. возможной прибыли.

Для второго проекта это соотношение составляет $^{10}/_{8}$, т.е. на 1 млн у.д.ед. возможного убытка приходится 1,25 млн у.д.ед. возможной прибыли.

Следовательно, исходя из соотношения возможных сумм прибылей и убытков, значительно предпочтительнее первый проект.

224. Вероятность получения “счастливого” билета (P) может быть определена по следующей формуле из теории вероятностей:

$$P=\frac{1}{10^6}\left(C_{32}^{5}-C_{6}^{1}\cdot C_{22}^{5}+C_{6}^{2}\cdot C_{12}^{5}\right)=0{,}055252, \text{ или } 5{,}52\,\%,$$

где C_n^m – сочетание из n элементов по m.

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Этот расчет можно проверить, собрав достаточное количество (порядка тысячи) любых билетов с шестизначными номерами и сосчитав, сколько "счастливых" приходится в среднем на сотню. Должно получиться 5–6 билетов.

225. При скорости движения колонны 4 км/ч (скорость пешехода), за один час под аркой пройдет около 2 тыс. человек (полагая, что на одном километре разместится около 500 людей).

За сутки пройдет

$$2 \text{ тыс.} \cdot 24 \text{ часа} = 48 \text{ тыс.},$$

за год –

$$48 \text{ тыс.} \cdot 355 \text{ суток} \approx 17 \text{ млн человек.}$$

Эта цифра сопоставима с ежегодным приростом населения Китая. Следовательно, к концу года перед аркой окажется столько же людей, сколько было вначале. Ответ на поставленный вопрос: никогда.

§ 3. Теория массового обслуживания (теория очередей). Метод Монте-Карло

226. С точки зрения общей продолжительности приема любая очередность посетителей равнозначна: суммарное время приема не меняется при любой его последовательности. А с точки зрения ожидания в очереди? Подсчитаем общее время ожидания как сумму времени ожидания всех посетителей. В нашем алфавитном списке оно составляет 260 мин = 4 ч 20 мин. Понятно, что это время желательно было бы уменьшить: ведь время ожидания – зря потраченное время. Но вот можно ли это сделать? Приведет ли расписание с другой последовательностью приема к экономии общего времени ожидания при сохранении намеченного суммарного времени приема?

Оказывается, получение такого расписания возможно. В одном из методов исследования операций – так называемой теории расписаний – доказывается, что наименьшее суммарное время ожидания получается при составлении расписания в порядке нарастания продолжительности приема. Составим такое расписание:

№ п/п	Фамилия (начальная буква)	Продолжительность приема, мин	Время ожидания, мин
1	К	5	0
2	Е	10	5
3	Д	15	15
4	Б	25	30
5	Т	30	55
6	С	35	85
Суммарное время		120 мин = 2 ч	190 мин = 3 ч 10 мин

Полученное оптимальное расписание позволяет уменьшить суммарное время ожидания на 1 ч 10 мин. Это значительно сэкономленное время можно использовать на полезные дела.

Задача директора находит применение не только в приемной руководителя. Ведь таким же образом можно составить и расписание очередности работы станка или другого оборудования над различными деталями. Продолжительность обработки при этом бывает различной, и нужно составить расписание таким образом, чтобы суммарное время обработки оказалось наименьшим. Это, как мы видели, дает существенный временной, а значит, и экономический эффект.

227. В теории расписаний доказывается, что в задаче двух станков для обеспечения оптимальной последовательности обработки с наименьшим временем ожидания необходимо составлять расписание, руководствуясь следующими правилами:

1) выбирается деталь с наименьшей продолжительностью обработки на одном из станков; в нашем примере – это деталь № 9;

2) выбранная деталь помещается в начало очереди, если наименьшая продолжительность обработки соответствует станку № 1, или в конец очереди, если – станку № 2; в нашем примере деталь № 9 помещается в конец очереди;

3) столбец таблицы, ранее занятый выбранной деталью, вычеркивается;

4) выбирается деталь среди оставшихся со следующей наименьшей продолжительностью обработки на одном из станков; в нашем примере – деталь № 7;

5) выбранная деталь помещается в начало или конец очереди по указанному в п. 2 правилу; в нашем примере деталь № 7 помещается в начало очереди;

6) вычеркивается соответствующий столбец таблицы. И так далее.

В итоге можно получить оптимальное расписание работы двух станков:

Последовательность обработки (порядковый номер очереди)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Номер детали	7	2	6	10	1	8	3	5	4	9
Продолжительность обработки на станке № 1, мин	2	3	4	6	7	9	12	20	14	19
Продолжительность обработки на станке № 2, мин	20	13	16	13	18	15	9	8	5	1

Полученное оптимальное расписание уменьшает время ожидания обработки до 2 мин (станок № 2 ждет в самом начале, пока станок № 1 обработает деталь № 7). Общее время обработки с учетом времени ожидания тем самым сокращается до 120 мин, т.е. на 12 %.

228. Расчет производится по формуле, применяемой в методе Монте-Карло:

$$P(\Delta < 0{,}02) = \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{N}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) = \Phi\left(\frac{0{,}02\sqrt{1000}}{\sqrt{0{,}3(1-0{,}3)}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{0{,}02\cdot 31{,}62}{0{,}458}\right) = \Phi(1{,}38).$$

С помощью табл. 3.31 находим:

$$P = 0{,}8324 \approx \mathbf{0{,}83}.$$

229. 1) Из условий задачи следует, что среднеожидаемое количество заявок на ремонт $\lambda = 0{,}5$ заявки в одну минуту.

2) По формуле (3.116):

$$a = \lambda \cdot t_0 = 0{,}5 \cdot 2 = 1 \text{ заявка.}$$

3) Из условия задачи следует, что вероятность того, что заявка не будет принята из-за занятости оператора, должна быть не более 0,02, поскольку:

$$P_n = 1 - 0{,}98 = 0{,}02.$$

4) По формуле (3.123) для различных значений $k = n$, начиная с 1, рассчитываются интересующие нас вероятности того, что $k = n$ операторов заняты:

для $n = k = 1$

$$P_n = \frac{1}{1+\frac{1}{1}} = 0{,}5,$$

не подходит, так как здесь $P_n > 0{,}02$;

для $n = k = 2$

$$P_n = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} = 0{,}2,$$

не подходит, так как здесь $P_n > 0{,}02$;

для $n = k = 3$

$$P_n = \frac{\frac{1}{6}}{1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}} = \frac{1}{16} = 0{,}0625,$$

не подходит, так как здесь $P_n > 0{,}02$;

для $n = k = 4$

$$P_n = \frac{\frac{1}{24}}{1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}} = 0{,}0154,$$

подходит, так как здесь $P_n < 0{,}02$.

Следовательно, искомое количество операторов $n = 4$.

§ 4. Теории игр и статистических решений

230. Условие задачи сводится в следующую таблицу:

Решение торгового агента	Погода		
	Туман (вероятность 0,1)	Ясно (вероятность 0,9)	
+ Лететь самолетом	2000 у.д.ед. (1500 + 500)	4500 у.д.ед. (1500 + 3000)	2000 · 0,1 + 4500 · 0,9 = = 4250 у.д.ед.
Ехать поездом	3000 у.д.ед.	3000 у.д.ед.	3000 · 0,1 + 3000 · 0,9 = = 3000 у.д.ед.

Цифры, оценивающие ожидаемый результат, получены из следующих соображений:

при полете самолетом в случае тумана агент не потеряет день на работе, который принесет 1500 у.д.ед., и получит у иногороднего клиента заказ по телефону, что даст еще 500 у.д.ед., итого 2000 у.д.ед.;

если при полете самолетом будет ясная погода, то он успеет получить 1500 у.д.ед. дома и 3000 – от иногороднего клиента, итого 4500 у.д.ед.;

в случае поездки поездом, независимо от погоды, он получит у иногороднего клиента заказ на 3000 у.д.ед.

Расчеты, приведенные справа от таблицы, показывают, что наибольший среднеожидаемый результат соответствует решению “лететь самолетом ”.

231. Таблица для выбора решения в условиях риска на этот раз будет выглядеть так:

			Обстановка		
			без аварии	авария	
Реше-ние	+	с предохранителем	–50 руб.	–50 руб.	– 50 – 50 = – 100 руб.
		без предохранителя	0	–150 руб.	0 – 150 = – 150 руб.

Следует принять то из решений, где материальные потери меньше – “с предохранителем”.

232. Составим таблицу для выбора решения.

			Обстановка (вероятности)		
			без аварии	авария	
			0,8	0,2	
Реше-ние		с предохранителем	–50 руб.	–50 руб.	– 50 · 0,8 – 50 · 0,2 = = – 50 руб.
	+	без предохранителя	0	–150 руб.	0 · 0,8 – 150 · 0,2 = = – 30 руб.

Решение изменилось на противоположное полученному при равных шансах: хотя предохранитель дешевле половины стоимости ремонта, он тут невыгоден.

233. Обозначим годовой доход Д, годовой страховой взнос $В_с$. Тогда по условию задачи можно написать:

$$Д = В_с \cdot 100 - 100 \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-4},$$

откуда

$$В_с = \frac{Д + 100 \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{100} = 12\,500 \text{ руб.}$$

234. Обозначая прибыль ПР, выплаты страховых премий в год $В_{сп}$, а затраты на организацию страховой деятельности $З_{сд}$, по условию задачи можно написать:

$$ПР = Д - В_{сп} - З_{сд} = 1 \text{ млн} - 250 \text{ тыс.} - 250 \text{ тыс.} = 0{,}5 \text{ млн руб.}$$

235. В соответствии с теорией статистических решений общий результат Энди равен:

$$0{,}5 \cdot 50 + 0{,}5 \cdot (-10) = 20 \text{ долларов.}$$

Поскольку этот результат положителен, решение Энди должно быть таким: “вперед, за должником”.

236. Казалось бы, шансы В.П. на победу равны нулю – ведь он в абсолютном меньшинстве. Но у него, оказывается, все же есть некоторый повод для размышлений. Ведь он может рискнуть прорваться через перевал, обеспечив себе перевес на одном из проходов.

Великий Полководец начинает с того, что анализирует сложившуюся ситуацию. Для этого он оценивает возможные результаты сражения при всех вариантах соотношения сил на перевале. Проследим ход рассуждений Великого Полководца. Он мыслил примерно так.

У З.П. есть всего три хода – варианта распределения своих четырех дивизий на защиту двух проходов: 4 и 0, 3 и 1, 2 и 2 дивизии соответственно на первый и второй проход.

В.П. имеет всего два варианта. Он может распределить свои три дивизии так: 3 и 0 или 2 и 1. Причем поскольку он может переставить дивизии по перевалам местами (0 и 3 или 1 и 2), то количество вариантов у В.П. удваивается.

Итак, всего можно ожидать 12 вариантов взаимного расположения сил В.П. и З.П. по проходам. Все они показаны на нашем рисунке, каждый в своей клетке (см. текст задачи).

Так как В.П. заранее не знает, какой вариант распределения сил избрал З.П., то он должен произвести расчеты ожидаемых результатов сражения для каждого из возможных вариантов.

Так, если при варианте З.П. 4 – 0 дивизий В.П. применит свой вариант 3 – 0, то в результате сражения на первом проходе 3 или 0 дивизий В.П. столкнутся с четырьмя дивизиями З.П. На втором проходе 0 либо 3 дивизии В.П. встретятся с 0 дивизий З.П.

В соответствующих проходах проставим числа, характеризующие результат сражения: три дивизии В.П. против четырех дивизий З.П. несут поражение; это означает, что один проход остается за З.П. На проходе, где встречаются три дивизии В.П. и четыре дивизии З.П., поставим цифру 1. Если три дивизии В.П. встречаются на втором проходе с 0 дивизий З.П., то это значит, что З.П. теряет один проход, значит, ставится цифра – 1. Если 0 дивизий В.П. сходятся с 0 дивизий З.П., то результат сражения ничейный и в соответствующем проходе появляется цифра 0.

Найдем далее средний результат – среднее число сохраненных проходов по варианту распределения сил В.П. 3 – 0 и варианту З.П. 4 – 0. Оно равно отношению суммарного результата к числу проходов:

$$\frac{1+1-1+0}{2}=\frac{1}{2}.$$

Этот результат покажем на пересечении соответствующих вариантов (ходов) В.П. и З.П. Он означает, что если В.П. рискнет распределить силы по проходам в соотношении 3 и 0, а З.П. будет распределять силы в соотношении 4 и 0, то Заурядному Полководцу в среднем удастся отстоять лишь $^1/_2$ прохода. Если бы З.П. поменял силы первого и второго проходов, то это на среднем результате не отразилось бы, так как В.П. эти варианты учитывает (поменялась бы лишь нумерация проходов).

Рассмотрим далее, как будет обстоять дело при других ходах – вариантах распределения сил В.П. и З.П., и внесем полученные результаты в соответствующие клетки.

Средние значения результатов сражений при всех вариантах соотношения сил на перевалах удобно для наглядности представить в виде отдельной таблицы.

Оценивая полученные средние результаты по всем вариантам, можно заметить, что наилучший из них для Великого Полководца получается тогда, когда он распределяет силы в соотношении 2 и 1, а у Заурядного Полководца при этом соотношение 4 и 0. Либо у В.П. 3 и 0, а у З.П. 2 и 2. В этих случаях среднее число проходов, сохраненных З.П., равно 0, т.е. Заурядный Полководец терпит полное поражение и теряет перевал.

Средние значения результатов сражений при всех вариантах соотношения сил на перевале (среднее число сохраненных проходов)

Варианты распределения сил Заурядного Полководца	Варианты распределения сил Великого Полководца		Худший результат В.П.
	3 – 0	2 – 1	
4 – 0	$^1/_2$	0	0
3 – 1	$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$*
2 – 2	0	1	0
Худший результат З.П.	$^1/_2$*	1	

Однако вариант В.П. 2 – 1 при ближайшем рассмотрении оказывается для него неприемлемым. Действительно, этот вариант хорош лишь при варианте З.П. 4 – 0. Но стоит Заурядному Полководцу случайно принять свой вариант 2 – 2, как сразу же оборона его становится наилучшей из всех возможных – среднее число сохраненных проходов равно единице, т.е. максимуму.

Поэтому Великому Полководцу целесообразно остановиться на своем варианте 3 – 0. При этом ему в любом случае гарантируется средний результат, не худший чем $^1/_2$. Появилась так называемая седловая точка. А поскольку противник у Великого Полководца заурядный и не владеет теорией игр, то не исключено, что он примет самое заурядное решение – без всякого риска разделит силы в соотношении 2 и 2 – и будет разбит наголову.

Так обдуманный риск слабого приносит ему победу над сильным.

237. Задача решается методами теории статистических решений с использованием принципа "рассчитывай на худшее".

Условия задачи сводятся в следующую таблицу:

Решение	Марина ("Природа")		
	не день рождения	день рождения	
Без цветов	0	–10	–10
+ С цветами	1	1,5	1 (лучший из худших результатов)

Выражая результаты в очках, вы вынуждены пользоваться произвольными числами. Это, однако, не должно вас смущать: важно, чтобы они не противоречили жизненному опыту. Так, отсутствие подарка в день рождения не менее чем в 10 раз хуже противоположной ситуации (в этом нетрудно убедиться экспериментально).

Вначале для каждого из решений находится худший результат, который выписывается вправо от таблицы. Затем из худших результатов выбирается лучший и соответствующее ему решение – "с цветами".

238. Ранги по каждой альтернативе складываются. Так, по альтернативе a_1 это будет $4 + 3 + 1 = 8$, по альтернативе a_2 – $3 + 2 + 2 = 7$, по альтернативе a_3 – $1 + 1 + 4 = 6$, по альтернативе a_4 – $2 + 4 + 3 = 9$.

Групповое решение соответствует той альтернативе, у которой сумма рангов оказывается наименьшей. (Напомним, что чем ниже ранг, тем больше предпочтение.) В данном примере это альтернатива a_3.

239. Для того чтобы минимизировать имеющиеся отклонения решений членов группы от группового решения, строится матрица расхождения исходов решения (табл. Р.5.1). При этом вначале делаются предположения о выборе группой той или иной альтернативы, а затем оцениваются расхождения между этим групповым и индивидуальными решениями. Так, если групповое решение соответствует альтернативе a_1 (оценка 3 балла), то расхождение между мнением коллектива и индивидуальным выбором 1-го лица равно единице, если же группа остановилась на варианте a_2 (3 балла), то расхождение между ней и 1-м лицом составит 2 балла, и т.д.

Таблица P.5.1

Матрица расхождений индивидуальных и групповых решений

Групповые решения	Индивидуальные решения			Максимальное расхождение
	1-е лицо	2-е лицо	3-е лицо	
a_1	1	0	2	2
a_2	2	2	0	2
a_3	3	1	1	1

Наименьшее отклонение 1

Далее в строчках для каждой альтернативы находится максимальное расхождение, а затем из этих максимальных расхождений – наименьшее, в данном случае 1 балл. Этому расхождению соответствует альтернатива a_3, которая и признается лучшим решением.

При такой стратегии выбора можно утверждать, что в случае принятия группой решения a_3 для любого лица расхождение его решения с решением группы остается минимальным и не превышающим 1 балла.

240. Поскольку 1-е лицо оценивает выше полезность первого варианта, а 2-е лицо – второго, при принятии группового решения прийти к общему мнению невозможно. В этом случае теория решений обычно предлагает основываться на средних величинах: средних вероятностях исходов и средних полезностях (табл. P.5.2). Теперь видно, что группа должна избрать вариант a_2.

Таблица P.5.2

Матрица средней полезности для группы

Варианты решения	Средние вероятности исходов		Полезность по двум исходам
	0,3	0,7	
a_1	–5	+8	$-5 \cdot 0{,}3 + 8 \cdot 0{,}7 = +4{,}1$
a_2	+30	–5	$+30 \cdot 0{,}3 - 5 \cdot 0{,}7 = +5{,}5$

241. Единодушное решение обоих – лучший вариант a_2. Но вот что показывает матрица средней полезности для группы (табл. Р.5.3): лучшим групповым решением оказывается вариант a_1.

Таблица Р.5.3

Матрица средней полезности для группы

Варианты решения	Средние вероятности исходов		Полезность по двум исходам
	0,5	0,5	
a_1	5	7	2,5 + 3,5 = 6
a_2	3	4	1,5 + 2,0 = 3,5

Этот парадокс, впрочем, не должен нас особенно удивлять. В жизни тоже иногда интересы отдельных личностей вступают в противоречие с интересами коллектива. И если речь идет о полезности риска для группы, то и решение должно приниматься в соответствии с коллективной необходимостью.

242. По правилам теории статистических решений эффективность (полезность) результата при первом решении находится как $100 \cdot 0{,}1 + (-5) \cdot 0{,}9 = 5{,}5$ единицы, а при втором решении как $(-95) \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}9 = -5$ единиц.

Принимается первое решение как обеспечивающее наибольший результат.

243. Расчет риска (R) производится по следующей эмпирической формуле:

$$R = 3{,}12P_{пр} + \lg C_{пр},$$

где $P_{пр}$ – вероятность проигрыша, $C_{пр}$ – величина проигрыша.

Для первой инвестиции $R_1 = 3{,}12 \cdot 0{,}5 + \lg 1 = 1{,}56$; для второй инвестиции $R_2 = 3{,}12 \cdot 0{,}3 + \lg 2 = 1{,}26$. Следовательно, вторая инвестиция менее рискованна.

§ 5. Сетевое планирование

244. Приступая к построению сетевого графика, разрабатывают перечень событий, которые определяют планируемый процесс – производственную задачу, без которых она не может состояться (табл. Р.5.4). Затем предусматриваются работы, в результате которых все необходимые события должны произойти (табл. Р.5.5)

Таблица Р.5.4

Обозначение события	Наименование события	Ответственные лица
a_0	Получено задание предприятием	Директор
a_1	Разработаны задания подразделениям № 1 и № 2	Заместитель директора по производству
a_2	Выполнена работа I этапа в подразделении № 1	Начальник подразделения № 1
a_3	Выполнена работа I этапа в подразделении № 2. Подразделением № 2 получены комплектующие из подразделения № 1	Начальник подразделения № 2
a_4	Выполнена работа II этапа в подразделении № 2	Начальник подразделения № 2
a_5	Выполнена работа II этапа в подразделении № 1. Подразделением № 1 получены комплектующие из подразделения №2	Начальник подразделения № 1
a_6	Выполнены работы III этапа в подразделениях № 1 и № 2. Заказ готов	Начальники подразделений № 1 и №2
a_7	Изделие доставлено потребителю	Начальник транспортной службы

Таблица Р.5.5

Обозначение работы	Наименование работы	Продолжительность выполнения работы, ч
A_{01}	Разработка заданий подразделениям № 1 и № 2	4
A_{12}	Выполнение работ I этапа в подразделении № 1	8
A_{13}	Выполнение работ I этапа в подразделении № 2	4
A_{23}	Передача комплектующих из подразделения № 1 в подразделение № 2	12
A_{25}	Выполнение работ II этапа в подразделении № 1	4
A_{34}	Выполнение работ II этапа в подразделении №2	8
A_{45}	Передача комплектующих из подразделения № 2 в подразделение № 1	4
A_{46}	Выполнение работ III этапа в подразделении № 1	4
A_{56}	Выполнение работ III этапа в подразделении № 2	8
A_{67}	Доставка заказа потребителю	4

Исходя из перечня событий и работ составляется сетевой график (см. рис. 5.3). Вначале это можно сделать схематично, без учета масштаба времени. Сетевой график строится от исходного события к завершающему, слева направо. Исходному событию присваивается нулевой номер, завершающему событию – последний номер. Остальные события нумеруются так, чтобы номер предыдущего события был меньше номера последующего.

Работа кодируется индексом, содержащим номера событий, между которыми она заключена. Совершение события зависит от окончания самой длительной из всех входящих в него работ. Последовательные работы и события формируют пути (цепочки), которые ведут от исходного к завершающему событию.

Далее сетевой график строится в масштабе времени (рис. Р.14).

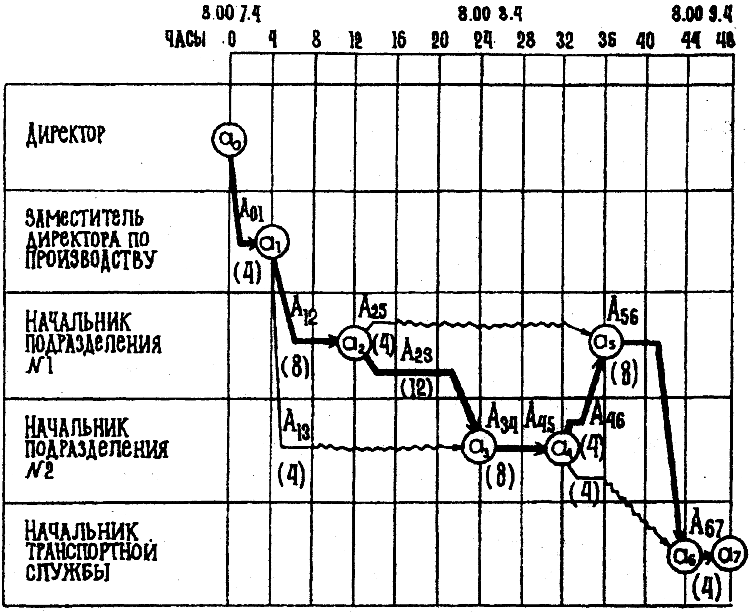

Рис. Р.14

Сетевой график дает возможность оценить количество и качество мероприятий планируемой производственной задачи. Он позволяет установить, от каких из них и в какой степени зависит достижение конечной цели действий. Так, ранг события показывает, какое количество работ необходимо выполнить, чтобы данное событие состоялось. Сетевой график также показывает, какое мероприятие следует выполнять в первую очередь, какие можно выполнять параллельно. Так, в нашем примере видно, что ни одна последующая работа не может выполняться раньше, чем закончатся все предшествующие. Видно также, что работы A_{25} и A_{23} могут выполняться параллельно.

После построения сетевого графика производится его анализ. Для этого строится так называемый критический путь. Это полный путь, на котором суммарная продолжительность работ является максимальной. Иными словами, это самый длинный по времени путь в сетевом графике от исходного до завершающего события. Критический путь лимитирует выполнение задачи в целом, поэтому любая задержка на работах критического пути увеличивает время всего процесса. На рис. Р.14 критический путь обозначен жирной линией.

Сущность анализа сетевого графика заключается в том, что выявляются резервы времени работ, лежащих вне критического пути, и направляются на работы, лежащие на критическом пути, который лимитирует срок завершения работы в целом. В нашем примере продолжительность работ, лежащих на критическом пути, равна 4 + 8 + 12 + 8 + 4 + 8 + 4 = 48 ч. Это и есть общее время решения всей производственной задачи.

На рисунке видно, что в подразделениях № 1 и № 2 появляются отрезки времени, на которых эти подразделения остаются без работы (волнистые линии). В этих случаях целесообразно снять отсюда часть трудовых и технических ресурсов и передать их тому подразделению, работа которого в это время лежит на критическом пути и лимитирует тем самым конечный результат. Так, например, после того как подразделение № 2 в момент, соответствующий восьмому часу работы, выполнит I этап, ему целесообразно передать часть своих ресурсов подразделению № 1 с расчетом, чтобы к событию a_3 подразделения № 1 и № 2 подошли одновременно. Для этого нужно передать из подразделения № 2 в подразделение № 1 ровно столько ресурсов, чтобы сократить сумму работ A_{12} и

A_{23} в подразделении № 1 на 8 часов, т.е. до 12 часов. При этом подразделение № 2, лишенное части ресурсов, увеличит время своей работы на эти же 8 часов (работа A_{13} станет равна 12 часам) и критический путь между событиями a_1 и a_2 будет равен 12 часам. Это сокращение общего времени критического пути означает и сокращение на то же время – на 8 часов – продолжительности решения всей производственной задачи.

245. Прежде всего составим перечни событий и работ планируемого мероприятия (табл. Р.5.6 и Р.5.7).

Таблица Р.5.6

Перечень событий, необходимых для организации ужина

Обозначение события	Наименование события
a_0	Сделано приглашение
a_1	Куплены продукты
a_2	Приготовлен ужин
a_3	Накрыт стол

Таблица Р.5.7

Перечень работ, необходимых для организации ужина

Обозначение работы	Наименование работы	Продолжительность выполнения работы, ч
A_{01}	Покупка продуктов	2
A_{12}	Приготовление ужина	2
A_{02}	Уборка квартиры	2
A_{23}	Накрывание стола	1

Руководствуясь данными табл. Р.5.6 и Р.5.7, строим сетевой график (рис. Р.15*а*).

Выявляем критический путь, который показан на рисунке двойной линией. При этом длина критического пути, а значит, и общая продолжительность работ оказывается равной 5 часам.

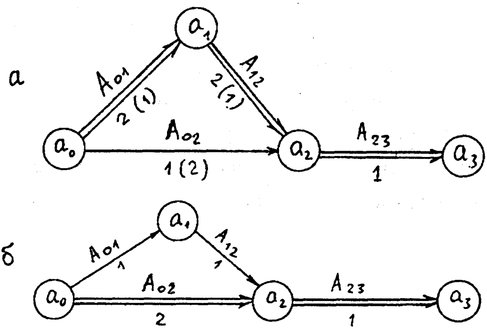

Рис. Р.15

Анализ графика показывает, что существуют определенные резервы времени: теща вместе с дочерью сделают уборку за 1 час и будут целых 3 часа ожидать без работы, пока жена купит продукты и приготовит ужин, чтобы можно было накрывать на стол.

Вывод: целесообразно перераспределить ресурсы, перебросив на критический путь дочь, освободив при этом ее от уборки квартиры. Тогда сетевой график приобретет вид, показанный на рис Р.15*б,* и общая продолжительность операции сократится с 5 до 3 часов.

“ВСТАНЬТЕ И ВООРУЖИТЕСЬ” (вместо заключения)

Изложенные в книге экономико-математические методы, а также решенные на их основе многочисленные экономические задачи, конечно, не исчерпывают всего арсенала средств, применяемых для выработки наилучшего экономического поведения и создания процветающего бизнеса. Но теперь у того, кто дочитал книгу до конца, появилось могучее современное оружие, с помощью которого, если понадобится, можно уверенно вступить в любую экономическую схватку.

Как всякое оружие, экономико-математические методы дают своему хозяину ряд серьезных преимуществ. Но, скажем откровенно, для реализации этих преимуществ одной книжной премудрости недостаточно. Чтобы успешно применять экономико-математические методы на практике и добиться ощутимого результата, нужно постоянно оттачивать свои профессиональные знания, решать все новые и новые задачи, а главное – иметь перед собой ясную цель, смелость и настойчивость для ее достижения. И помнить: оружие существует.

Прислушаемся же к призыву выдающегося предпринимателя нашего века Генри Форда: “ВСТАНЬТЕ И ВООРУЖИТЕСЬ, ПУСТЬ СЛАБЫЕ ПОЛУЧАЮТ МИЛОСТЫНЮ!”

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Библиографический список книг В.А. Абчука по экономике, менеджменту и прикладной математике

1. Введение в теорию выработки решений (в соавт.). – М.: Воениздат, 1972. – 339с.

2. Секрет великих полководцев. – Л.: Детгиз, 1975. – 192с.

3. Основы исследования операций. – Л.: ВОК ВМФ, 1977. – 316с.

4. Справочник по исследованию операций (в соавт.). – М.: Воениздат, 1978. – 361с.

5. По следам будущего. – Л.: Детгиз, 1980. – 186с.

6. Правила удачи. – Л.: Детгиз, 1986. – 127с.

7. Семь : один в нашу пользу. – М.: Радио и связь, 1983. – 174с.

8. Теория риска. – Л.: Судостроение, 1983. – 148с.

9. Автоматизация управления (в соавт.). – М.: Радио и связь, 1984. – 262с.

10. В мире управляющих машин. – Л.: Политехника, 1987. – 191с.

11. Правила решений (в соавт.). – Л.: Лениздат, 1987. – 171с.

12. Управление в гибком производстве (в соавт.). – М.: Радио и связь, 1990. – 126с.

13. Директорский хлеб. – Л.: Лениздат, 1991. – 208с.

14. Азбука бизнеса. – СПб.: ИПК РП, 1994. – 74с.

15. Предприимчивость и риск. – СПб.: ИПК РП, 1994. – 64с.

16. Правила успеха. – СПб.: ИПК РП, 1994. – 58с.

17. Карманный бизнес-самоучитель. – СПб.: Дело, 1994. – 92с.

18. Уроки бизнеса. – СПб.: Образование, 1994. – 190с.

19. Задачник по бизнесу. – СПб.: Образование, 1994. – 146с.

20. Основы предпринимательства. – М.: Вита-пресс, 1995. – 238с.

21. 250 занимательных задач по менеджменту и маркетингу. – М.: Вита-пресс, 1997. – 156с.

22. Азбука маркетинга. – СПб.: Союз, 1998. – 270с.

23. Азбука менеджмента. – СПб.: Союз, 1998. – 271с.

24. Занимательная экономика и бизнес. – СПб.: Тригон, 1998. – 488с.

25. Экономика (10-й класс). – СПб.: Специальная литература, 1998. – 300с.

26. Экономика (11-й класс). – СПб.: Специальная литература, 1998. – 269с.

27. Задачник по экономике. – СПб.: Специальная литература, 1998. – 191с.

28. Курс бизнеса. – СПб.: Мир и семья, 1998. – 765с.

29. 300 бизнес-шансов. – СПб.: Деан, 1999. – 167с.

30. Лекции по менеджменту: Решение. Предвидение. Риск. – СПб.: Союз, 1999. – 335с.

Владимир Авраамович Абчук

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
Элементарная математика и логика
Методы исследования операций

Зав. редакцией *А.Н. Драчев*
Лит. редактор *Н.Л. Товмач*
Комп. верстка *А.В. Соболев*

ЛР № 065425 от 30.09.97 г.

Подписано в печать 30.06.99 г. Формат 84x108$^{1}/_{32}$.
Гарнитура Times. Печать офсетная.
Объем: 10,0 печ. л. Тираж 10 000 экз.
Заказ № 697.

Издательство **«СОЮЗ»**.
195197, Санкт-Петербург, ул. Васенко, 6.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГИПК «Лениздат» (типография им. Володарского).
Государственного комитета РФ по печати.
191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 59.